

627.3  
И 34  
П. Н. МАТХАНОВ

# ОСНОВЫ АНАЛИЗА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

## Нелинейные цепи

---

*учебник  
для вузов*



П. Н. МАТХАНОВ

# ОСНОВЫ АНАЛИЗА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

## Нелинейные цепи

Издание второе,  
переработанное и дополненное

Допущено Министерством высшего и среднего  
специального образования СССР  
в качестве учебника  
для студентов электротехнических специальностей  
вузов



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1986

ББК 31.211  
М 34  
УДК 621.3.01

Рецензент — кафедра ТОЭ Новосибирского электротехнического института (зав. кафедрой — д-р техн. наук, проф. В. М. Казанский)

**Матханов П. Н.**

**М34** Основы анализа электрических цепей. Нелинейные цепи: Учеб. для студентов электротехн. спец. вузов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. шк., 1986. — 352 с.: ил.

В пер.: 1 р. 10 к.

В книге приведены основные сведения по анализу нелинейных электрических цепей, применяемых в радиоэлектронике, электротехнике и т. д., рассматривается применение резистивных и динамических цепей и цепей с переменными параметрами, описываются простые алгоритмы численного анализа резистивных и динамических цепей, рассчитанные на применение ЭВМ. Во второе издание (первое — в 1977 г.) добавлен материал о процессах в автоколебательных системах, по численным методам, преобразователям характеристик и т. д.

М 2302010000—163  
001(01)—86 121 36

ББК 31.211  
6П2.1

**Платон Николаевич Матханов**

## **ОСНОВЫ АНАЛИЗА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ**

Зав. редакцией Л. А. Романова. Редактор Е. А. Орехова. Худ. редактор Т. М. Скворцова. Переплет художника А. И. Шаварда. Мл. редактор И. А. Титова. Техн. редактор Ю. А. Хорева. Корректор В. В. Кожуткина

ИБ № 5406

Изд. № ЭР-393. Сдано в набор 15.10.85. Подп. в печать 30.01.86.  
Формат 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая.  
Объем 18,48 усл. печ. л. 18,48 усл. кр.-отт. 18,67 уч.-изд. л. Тираж 17 000 экз.  
Зак № 1108 Цена 1 р. 10 к.  
Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли  
129041, Москва, Б. Переяславская ул., 46

© Издательство «Высшая школа», 1977  
© Издательство «Высшая школа», 1986, с изменениями

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Нелинейные цепи и приборы находят широкое применение в электротехнике, радиоэлектронике, автоматике и других областях, интенсивное развитие которых предусмотрено в двенадцатой пятилетке. Работа большого числа многих важных устройств основана на использовании свойств и явлений, присущих только нелинейным цепям. В ближайшем будущем можно ожидать дальнейшего расширения сферы применений новых нелинейных приборов с новыми характеристиками и свойствами. Поэтому значение теории нелинейных цепей и систем для будущего инженера-электрика очень велико.

При составлении учебного пособия по нелинейным цепям приходится сталкиваться со значительными трудностями. Это связано с тем, что, с одной стороны, время, отводимое на курс, и объем книги ограничены. С другой стороны, явления в нелинейных устройствах весьма сложны, отсутствуют общие методы анализа и объем материала велик. Хотя этот материал невозможно охватить в одной книге, все же желательно дать достаточно полное представление о процессах и важнейших методах анализа. Дело в том, что, как правило, любую конкретную задачу нелинейной цепи можно решить лишь с помощью ряда методов. При этом важно уметь выбрать наиболее эффективные методы. Необходимо, чтобы студент наряду с нужными сведениями по количественным и численным методам с применением ЦВМ получил представления о качественных методах исследования.

Изложение материала книги начинается с анализа цепей, содержащих один вид элемента: резистивных, индуктивных и емкостных цепей, описываемых функциональными уравнениями. Затем рассматриваются цепи с различными видами элементов, описываемые дифференциальными уравнениями. Кратко изложены метод фазовых траекторий, кусочно-линейный метод и простейшие алгоритмы численного анализа. Примеры применений приводятся по возможности отдельно от методов анализа.

Второе издание книги при сохранении общей структуры первого издания (1977) выходит в переработанном и дополненном виде: изменен порядок изложения некоторых глав; приведены описание преобразователей характеристик, численный анализ резистивных и динамических цепей по дискретным схемам замещения, расширено изложение алгоритмов численного анализа нелинейных динамических цепей. Более подробно излагаются процессы в автоколебательных цепях и системах, которые имеют не только большое практическое значение, но также служат хорошей иллюстрацией теории нелинейных явлений. С целью учета современного состояния элементной базы введены параграфы по функциональным модулям.

Автор выражает глубокую благодарность проф. В. Е. Боголюбову, чл.-кор. АН УССР, проф. И. М. Чиженко и доц. О. Б. Толпыго, советы и замечания которых были использованы автором, рецензентам настоящего издания коллективу кафедры ТОЭ Новосибирского электротехнического института: зав. кафедрой, проф. В. М. Казанскому, доц. В. И. Клецову и доц. Л. И. Малинину за ценные замечания, учтенные автором.

Отзывы и пожелания по книге направлять по адресу: 101430, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14, издательство «Высшая школа».

*Автор*

## ВВЕДЕНИЕ

### § В.1. Общие сведения о нелинейных элементах

В теории линейных цепей предполагается, что параметры всех сосредоточенных элементов — резистивных, емкостных и индуктивных — являются постоянными величинами, не зависящими от токов и напряжений, а также от времени. Каждому из этих элементов можно приписать определенное значение параметра: резистивному — сопротивление  $R$ , емкостному элементу — емкость  $C$ , индуктивному — индуктивность  $L$ .

Предположение постоянства параметров является идеализацией. В действительности параметры элементов в какой-то степени зависят от тока или напряжения, а также от времени. Поэтому постоянство параметров допустимо принимать лишь в пределах ограниченного изменения токов и напряжений. Имеется широкий класс реальных элементов, у которых в довольно большом диапазоне изменения значений переменных цепей — токов и напряжений — допустимо принимать постоянство параметров. Цепи из таких элементов изучаются в теории линейных цепей.

Существует также обширный класс очень важных элементов и устройств, параметры которых существенно зависят от токов или напряжений. Такие элементы называют нелинейными. Им нельзя приписать какие-то определенные параметры при изменении переменных цепей в конечном диапазоне. Для количественного описания свойств нелинейных элементов необходимо задавать зависимости, называемые характеристиками. Обычно эти зависимости определяют экспериментально и представляют в виде графиков.

Рассмотрим в общем виде характеристики основных нелинейных идеализированных двухполюсных элементов.

**Резистивный элемент.** Условное обозначение элемента показано на рис. В.1, а. Резистивный элемент полностью определяется зависимостью между током  $i$  и напряжением  $u$ , называемой вольт-амперной характеристикой:

$$i = i(u); \quad u = u(i). \quad (\text{В.1})$$

На рис. В.1, *г* показана характеристика нелинейного элемента (кривые 1, 3); здесь же пунктирной прямой 2 изображена характеристика линейного элемента — постоянного сопротивления, уравнение которой имеет вид  $i = u/R$ , где  $1/R$  — угловой коэффициент прямой. В отличие от линейного элемента для нелинейного элемента понятие величины сопротивления не имеет большого значения. Только задание всей зависимости в пределах ожидаемых изменений переменных характеризует элемент. Для каждой ее точки можно ввести понятия

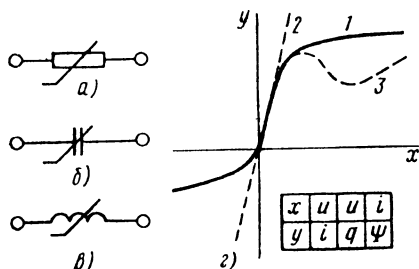


Рис. В.1

статического и динамического сопротивлений. Под статическим сопротивлением понимают отношение абсциссы выбранной точки характеристики к ее ординате или отношение постоянного напряжения на элементе к установившемуся значению постоянного тока, а под динамическим сопротивлением — отношение малого приращения напряжения к соответствующему приращению тока, т.е. величину, обратную угловому коэффициенту прямой:

$R_{ст} = u/i$ ;  $r_{д} = du/di$ .

(В.2)

Характеристики на рис. В.1, *г* расположены только в *первом* и *третьем* квадрантах, в которых знаки напряжения и тока совпадают. Следовательно, мощность, потребляемая элементами, положительна:  $p = ui \geq 0$ .

Резистивные элементы, в которых потребляемая мощность не принимает отрицательных значений, называют *пассивными*.

Как видно из (В. 2), статическое сопротивление пассивного резистивного элемента всегда положительно. Что касается динамического сопротивления, то оно может принимать отрицательные значения в местах, где характеристика падает и наклон ее отрицателен (кривая 3).

Если некоторые участки характеристики попадают во *второй* или *четвертый* квадрант, то на этих участках знаки напряжения и тока противоположны и, следовательно, статическое сопротивление, а также потребляемая мощность отрицательны. Последнее означает генерацию энергии. Резистивные элементы, обладающие указанным видом характеристики, называют *активными*.

**Емкостный элемент.** Условное обозначение емкостного элемента показано на рис. В.1, б. Емкостный элемент полностью определяется зависимостью между зарядом  $q$  и напряжением, называемой кулон-вольтной характеристикой:

$$q = q(u); \quad u = u(q), \quad (\text{В.3})$$

где

$$q = \int_{-\infty}^t i dt; \quad i = dq/dt.$$

Характеристики линейного и нелинейного элементов, показанные на рис. В.1, г, можно отнести также к емкостному элементу, если по оси абсцисс откладывать напряжение, а по оси ординат — заряд. Характеристика линейного элемента — постоянной емкости — полностью определяется величиной емкости  $C$ , которая является угловым коэффициентом прямой  $q = Cu$ . Для нелинейной емкости необходимо задавать всю характеристику в пределах ожидаемых изменений напряжений и токов. Для каждой точки характеристики можно ввести понятие статической и динамической емкостей. Статическая емкость представляет отношение ординаты выбранной точки характеристики к ее абсциссе, а динамическая емкость — отношение малого приращения заряда к соответствующему приращению напряжения:

$$C_{ст} = q/u; \quad C_{д} = dq/du. \quad (\text{В.4})$$

Для характеристики в системе координат  $u - q$  (см. рис. В.1, г), расположенной в *первом и третьем квадрантах*, знаки заряда и напряжения одинаковы, так что энергия, потребляемая элементом, положительна для любого момента времени:

$$W(t) = \int_{-\infty}^t q du \geq 0,$$

и рассматриваемый емкостный элемент является *пассивным*.

Если некоторые участки кулон-вольтной характеристики окажутся во *втором и четвертом квадрантах*, то емкостный элемент будет *активным*.

**Индуктивный элемент.** Условное обозначение индуктивного элемента приведено на рис. В.1, в. Индуктивный элемент полностью определяется зависимостью между потокосцеплением  $\Psi$  и током  $i$ , которую называют *вебер-амперной характеристикой*:

$$\Psi = \Psi(i); \quad i = i(\Psi), \quad (\text{В.5})$$



где

$$\Psi = \int_{-\infty}^t u dt; \quad u = d\Psi/dt.$$

Характеристики, приведенные на рис. В.1, *з*, могут быть отнесены к индуктивному элементу, если по оси абсцисс откладывать ток, а по оси ординат — потокосцепление. Характеристика линейного элемента — постоянной индуктивности — полностью определяется величиной индуктивности  $L$ , представляющей угловой коэффициент прямой  $\Psi = Li$ . Для нелинейной индуктивности должна быть задана вся характеристика в пределах изменения переменных. Для каждой ее точки можно ввести статическую и динамическую индуктивности:

$$L_{ст} = \Psi/i; \quad L_d = d\Psi/di. \quad (B.6)$$

Характеристики в системе координат  $i - \Psi$  (см. рис. В.1, *б*) относят к *пассивным индуктивным* элементам — они расположены в *первом и третьем* квадрантах. Соответственно энергия, потребляемая элементом, положительна для любого значения  $t$ :

$$W(t) = \int_{-\infty}^t i d\Psi \geq 0.$$

Индуктивный элемент, не являющийся пассивным, относится к *активному* элементу — некоторые участки его характеристики располагаются в *втором и четвертом* квадрантах.

Наряду с рассмотренными двухполюсными элементами можно ввести нелинейные четырех- и многополюсные элементы.

Электрическая цепь состоит из взаимного соединения отдельных элементов. *Цепь называется нелинейной, если она содержит хотя бы один нелинейный элемент.* Задача анализа, состоящая в определении реакций — напряжений и токов заданной цепи при заданном воздействии, — сводится к составлению и решению дифференциальных уравнений цепи. *Нелинейные цепи описываются нелинейными дифференциальными уравнениями*, в которые неизвестные переменные — напряжение или ток и ее производные — входят нелинейно, т. е. не в первой степени, как в линейных уравнениях, а произвольно: в любой степени, в виде произведений, трансцендентных функций и т. д. *Общих методов аналитического решения таких уравнений не существует.*

## § В.2. О некоторых особенностях нелинейных цепей

Одна из главных с точки зрения анализа особенностей нелинейных цепей состоит в том, что к ним неприменим принцип наложения. Покажем это на простейшем примере резистивного элемента с нелинейной вольт-амперной характеристикой в виде квадратичной зависимости:

$$i = au^2.$$

Если приложенное к элементу напряжение представить в виде суммы двух составляющих:

$$u = u_1 + u_2,$$

то ток

$$i = a(u_1 + u_2)^2 = a(u_1^2 + 2u_1 u_2 + u_2^2).$$

Если же взять сумму токов, получающихся при действии каждой из составляющих порознь:

$$i_{\Sigma} = i_1 + i_2 = a(u_1^2 + u_2^2),$$

то получим другое значение, т. е. в данном случае нельзя применять принцип наложения.

Широко используется принцип наложения для линейных цепей. Хорошая разработанность теории линейных цепей объясняется именно использованием методов, основанных на принципе наложения. Достаточно знать реакцию цепи на действие сигнала одной формы, например единичной импульсной или синусоидальной функции, чтобы найти реакцию на действие сигнала произвольной формы с помощью интеграла наложения или частотного метода.

Иное положение получается с теорией нелинейных цепей, в которых не соблюдается принцип наложения. Следствием неприменимости принципа наложения является то, что *не существует сколько-нибудь общих приемов аналитического решения нелинейных дифференциальных уравнений*, даже уравнений первого порядка. Здесь можно говорить лишь о приближенных методах решения, пригодных для ограниченного класса уравнений, или о численных методах решения. Это распространяется и на теорию нелинейных цепей, описываемых нелинейными уравнениями. В отличие от линейных цепей всякое изменение формы или амплитуды действующего сигнала приводит к новой задаче с новым часто совершенно иным решением.

В настоящее время очень многие вопросы анализа нелинейных цепей остаются нерешенными, и вряд ли вообще возможно разработать единый метод их анализа. Если ставится задача

анализа определенной нелинейной цепи, то ввиду сложности процессов и отсутствия общих способов выявления их особенностей, как правило, невозможно обойтись одним методом. Для получения решения требуется ряд методов, каждый из которых позволяет более четко выяснить одну из сторон процесса. Поэтому необходимо иметь представление о наиболее важных методах анализа нелинейных цепей, а также о характере возможных процессов в различных цепях.

Следует также учитывать инженерные требования, предъявляемые к анализу. При анализе недостаточно ограничиваться только определением реакции заданной цепи. Анализ должен дать возможность выявить степень влияния на процессы отдельных элементов и их характеристик, структуры цепи, а также указать пути изменения реакции в нужном направлении. Следовательно, анализ должен служить в первую очередь целям проектирования. С этой точки зрения очень ценны *качественные и приближенные* методы.

Необходимо отметить следующее: в линейных цепях, которые легко анализируются, явления и процессы относительно просты — они предсказуемы, и здесь нельзя ожидать новых неизвестных процессов. *Причиной трудности анализа нелинейных цепей являются сложность и разнообразие явлений и процессов в них.* Далеко не всегда возможно предсказание ожидаемых изменений напряжений и токов даже в относительно простой цепи. *Многообразием процессов* объясняется очень широкое применение нелинейных устройств и цепей в электротехнике и радиоэлектронике. Работа большого числа устройств и приборов базируется на явлениях и процессах, происходящих только в нелинейных цепях.

Перечислим некоторые из наиболее известных явлений, имеющих место только в нелинейных цепях и принципиально невозможных в линейных цепях.

1. При действии на входе цепи *синусоидального сигнала* форма выходного сигнала всегда получается искаженной и содержит *высшие гармоники*, так что в спектре выходного сигнала имеются линии, не существующие во входном сигнале.

2. При некоторых условиях в нелинейной цепи могут установиться так называемые *субгармонические колебания*, частоты которых в целое число раз ниже частоты приложенного к цепи синусоидального сигнала.

3. При действии на входе сигнала, состоящего из наложения (суммы) двух или более синусоидальных колебаний, выходная реакция наряду с отмеченными колебаниями кратных частот содержит *колебания с комбинационными частотами*, которые равны суммам и разностям частот, кратных частотам слагаемых

входного сигнала. В общем случае комбинационные частоты не кратны частотам составляющих входного сигнала.

4. В нелинейных цепях *амплитуда выходной реакции непропорциональна амплитуде входного сигнала*; в цепях, используемых в качестве стабилизаторов, в некотором диапазоне изменения входного напряжения (тока) амплитуда выходного напряжения (тока) может оставаться постоянной.

5. Если отсутствует внешнее воздействие, то при больших значениях времени в цепи устанавливается определенный режим с неизменными значениями напряжения и тока, называемый состоянием равновесия. *Нелинейные цепи часто имеют несколько состояний равновесия*. Некоторые из этих состояний могут оказаться неустойчивыми — соответствующие им установившиеся режимы не могут существовать в цепи. В зависимости от начальных условий процесс будет стремиться к одному из устойчивых состояний равновесия, определяющему установившийся режим. Таким образом, *процесс в нелинейной цепи может быть не единственным*.

6. Существует очень важный класс автоколебательных нелинейных цепей, в которых, несмотря на потерю энергии, возникают *незатухающие колебания при отсутствии внешнего периодического воздействия*. Автоколебания могут возникать и в цепях, описываемых уравнениями первого порядка. Амплитуды колебаний определяются только характеристиками нелинейных элементов и не зависят от начальных условий. В сложных цепях может быть несколько автоколебательных режимов с различными частотами и амплитудами колебаний.

7. При плавном изменении амплитуды входного сигнала или частоты (если действует периодический сигнал) в нелинейных цепях могут иметь место *скачкообразные изменения* напряжений и токов или фаз и частоты в случае периодического режима.

8. В сложной нелинейной цепи со многими элементами, имеющими произвольные характеристики, при различных внешних воздействиях, а также различных начальных условиях можно получить сочетание всех перечисленных особенностей. Изменяя начальные условия или внешнее воздействие, можно выявить весь набор явлений. *Поведение произвольной нелинейной цепи является практически бесконечно разнообразным*

## ГЛАВА I

### ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕМЕНТОВ И УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

#### § 1.1. Общие сведения

Нелинейные цепи, составленные из элементов одного вида, например из резистивных элементов, являются более простыми чем нелинейные цепи, составленные из элементов различных видов. *Нелинейные резистивные цепи описываются системами функциональных — алгебраических или трансцендентных — уравнений.* Решения этих уравнений хотя и связаны с трудностями, но все же намного проще, чем решения систем дифференциальных уравнений, которыми описываются цепи с двумя или тремя видами элементов.

Анализ резистивных цепей является необходимой частью анализа цепей общего вида. Поэтому, прежде чем перейти к общему случаю цепей с тремя видами элементов, следует изучить основы анализа цепей, составленных только из резистивных элементов.

Изучение теории резистивных цепей, естественно, должно начинаться с изложения основных свойств элементов. Свойства идеального резистивного элемента, как указывалось, полностью определяются связью между напряжением и током, т. е. вольт-амперной характеристикой. Вольт-амперная характеристика двухполюсного резистивного элемента представляет зависимость между напряжением на его выводах и током:  $i = i(u)$ .

Обычно характеристику снимают экспериментально и изображают в виде графика на плоскости  $u — i$ . Для однотипности и наглядного сравнения различных характеристик их принято изображать в системе координат с осью абсцисс — напряжением и осью ординат — током.

Вольт-амперную характеристику обычно снимают путем измерения приложенных к элементу постоянного напряжения и тока, значения которых регулируют так, чтобы получить все точки кривой. Процесс снятия характеристик можно ускорить,

если прикладывать к элементу переменное напряжение и ток низкой частоты и использовать экран электронно-лучевой трубки: к взаимно перпендикулярным пластинам подводят сигналы, пропорциональные напряжению и току элемента. Полученные указанными способами характеристики являются статическими. Статическая вольт-амперная характеристика полностью определяет поведение двухполюсного элемента относительно его выводов, если частота напряжения или тока в нем не превышает некоторого значения. Для каждого прибора или элемента имеется своя предельная частота, зави-

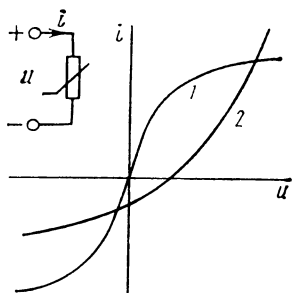


Рис. 1.1

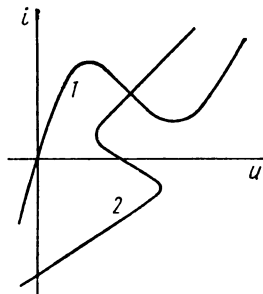


Рис. 1.2

сящая от физических процессов в элементе, при превышении которой статическими характеристиками нельзя пользоваться без соответствующей коррекции.

Учет влияния частоты на физические процессы в элементе и его характеристики является затруднительным. Поэтому будем полагать, что частоты напряжений и токов в элементе не превышают предельно допустимых значений и, следовательно, статические характеристики полностью определяют электрические свойства двухполюсника.

Дадим общую классификацию видов характеристик резистивных двухполюсников при указанных на рис. 1.1 положительных направлениях тока и напряжения. Прежде всего характеристика может располагаться в различных квадрантах плоскости  $u - i$ .

Если характеристика располагается только в *первом и третьем квадрантах* (кривые 1 на рис. 1.1 и 1.2), то она относится к *пассивному элементу*: мощность  $p = ui$ , потребляемая элементом, не принимает отрицательного значения, так как знаки напряжения и тока совпадают. Очевидно, характеристика пассивного элемента проходит через начало координат.

Если же некоторый участок характеристики попадает во второй или четвертый квадрант (кривые 2 на рис. 1.1 и 1.2), то характеристика относится к активному элементу: в указанных квадрантах знаки напряжения и тока противоположны, их произведение отрицательно, что означает генерирование мощности. По определению, любой непассивный элемент является активным.

Характеристика пассивного элемента может быть *симметричной* (кривая 1 на рис. 1.1) относительно начала координат, когда она является нечетной функцией:

$$i(u) = -i(-u),$$

и *несимметричной* (кривая 2 на рис. 1.1), если это условие не выполняется. Элемент с симметричной характеристикой обладает тем свойством, что при перемене его выводов характеристика не изменяется. Указанный тип элемента, обладающий свойством инвариантности характеристики при взаимной перемене выводов, называют *двусторонним*.

Различают далее *монотонную* и *немонотонную* характеристики.

В случае монотонной характеристики при  $-\infty < u < \infty$  наклон кривой, т. е. производная  $di/du$ , не меняет своего знака — остается положительной (отрицательной) и не принимает отрицательного (положительного) значения (кривые на рис. 1.1). Если производная не принимает нулевого значения, т. е. кривая не имеет горизонтальных участков, то говорят о строго монотонной характеристике.

Если при  $-\infty < u < \infty$  наклон кривой, т. е. производная, меняет свой знак, то получается немонотонная характеристика или характеристика с падающими участками (кривые на рис. 1.2). На таких участках динамическое сопротивление отрицательно. В большинстве случаев элемент с немонотонной характеристикой имеет один участок с отрицательным наклоном. Различают два вида характеристик с падающими участками: характеристику типа *N* и характеристику типа *S*.

*Характеристика типа N* (кривая 1 на рис. 1.2) имеет участок, где  $r_d < 0$ . Здесь зависимость между напряжением и током такова, что каждому значению напряжения соответствует единственное значение тока — ток является однозначной функцией напряжения. Немонотонную характеристику типа *N* с током, однозначно определяемым напряжением, называют характеристикой, управляемой *напряжением*. В зависимости от тока характеристика типа *N* неоднозначна — заданному значению тока могут соответствовать три значения напряжения.

Характеристика типа  $S$  (кривая 2 на рис. 1.2) также имеет участок с отрицательным наклоном. Но здесь каждому значению тока соответствует определенное значение напряжения — напряжение является однозначной функцией тока. Характеристику типа  $S$  с напряжением, однозначно определяемым током, называют характеристикой, управляемой *током*. В зависимости от напряжения рассматриваемая характеристика неоднозначна — заданному значению напряжения могут соответствовать три значения тока.

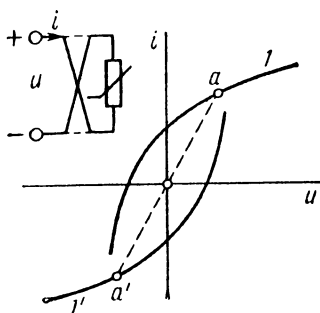


Рис. 1.3

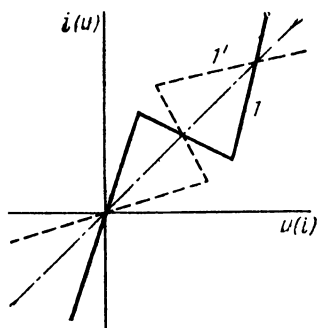


Рис. 1.4

Рассмотрим получение характеристики при взаимной *перемене выводов* двухполюсного элемента (рис. 1.3). Взаимная перемена выводов изменяет одновременно направления как тока, так и напряжения на обратные. Это означает, что должны взаимно поменяться положительные и отрицательные направления осей координатной системы, в которой изображена исходная характеристика. Характеристику элемента при перемене выводов можно, следовательно, получить вращением осей координат на  $180^\circ$  вокруг начала координат. Соответствующие точки искомой  $1'$  и исходной  $1$  характеристик лежат на прямой, проходящей через начало координат на одинаковом удалении от начала. Как было сказано, только симметричная характеристика остается неизменной при взаимной перемене выводов и знаков осей координат.

Остановимся на вопросе *обращения* характеристик. Если задана характеристика  $i = i(u)$ , то обращение характеристики означает представление ее в виде  $u = u(i)$ , т. е. решение исходного соотношения относительно напряжения.

Проще всего получить обращение заданной характеристики графически — достаточно взаимно поменять местами коор-



динатныи оси: по оси абсцисс откладывать ток, а по оси ординат — напряжение. Соответствующую обращенную характеристику в этой системе координат можно получить, если график исходной характеристики  $i = i(u)$  изобразить на прозрачной бумаге, повернуть на  $90^\circ$  против часовой стрелки и посмотреть на чертеж с обратной стороны.

Легко убедиться, что исходная и обращенная характеристики располагаются симметрично относительно прямой, проходящей через начало координат под углом  $45^\circ$ . Отсюда следует другой прием построения обращенной характеристики путем отображения исходной характеристики относительно прямой, проходящей через начало координат под углом  $45^\circ$ . На рис. 1.4 показаны характеристика  $I$  в координатной системе  $u - i$  и обращенная характеристика  $I'$  в системе координат  $i - u$ .

Сопоставление участков исходной и обращенной характеристик позволяет сделать вывод о том, что монотонная и, следовательно, однозначная характеристика переходит также в монотонную однозначную обращенную характеристику. Немонотонная однозначная характеристика, управляемая напряжением, переходит также в немонотонную, но многозначную характеристику.

В заключение дадим определение дуальных характеристик и дуальных резистивных элементов. Здесь речь пойдет о сопоставлении характеристик двух различных элементов. Характеристики двух резистивных элементов называются дуальными, если замена напряжения на ток и тока на напряжение у характеристики одного элемента дает характеристику второго элемента. Зависимости  $i_1 = f(u_1)$  для первого элемента и  $u_2 = f(i_2)$  для второго одинаковы. Соответствующие два элемента, характеристики которых дуальны, являются взаимно дуальными. Отметим, что среди реальных нелинейных элементов, обладающих только свойственными им характеристиками, имеется немного дуальных элементов.

С практической точки зрения предположение произвольного вида характеристик, которое принималось до сих пор, не представляет, конечно, большого интереса. Поэтому при задании характеристик необходимо ориентироваться на существующие нелинейные резистивные элементы и приборы.

В настоящее время имеется большое число различных устройств и приборов, имеющих нелинейные зависимости между напряжением и током. Большинство из них появилось в последние десятилетия в связи с развитием полупроводниковой техники. Можно ожидать появления новых типов приборов с более разнообразными свойствами и характеристиками.

Можно дать следующую общую классификацию существующих нелинейных резистивных элементов: 1) двухполюсные; 2) двухполюсные управляемые; 3) трех- и многополюсные.

Вначале рассмотрим характеристики некоторых видов нелинейных резистивных элементов, получивших наиболее широкое практическое применение. Будем полагать, что представляющие главный интерес характеристики элементов получены экспериментально с помощью соответствующих измерений.

Физические процессы, обуславливающие тот или иной вид характеристики элемента, могут быть очень сложными и разнообразными. В нашу задачу не входит обоснование видов характеристик исходя из физической картины процессов. Предполагается, что в общих чертах они известны из курса физики и более подробно изучаются в специальных курсах. Поэтому ограничимся краткими замечаниями о процессах в элементах, характеристики которых рассматриваются далее.

С точки зрения теории цепей, которая интересуется поведением элементов только по отношению к их выводам, достаточно знать характеристики, полученные экспериментально.

После ознакомления с характеристиками некоторых реальных элементов, задаваемыми в виде графиков, рассмотрим их приближенное аналитическое представление. Такое представление необходимо, если используются аналитические методы расчета. Далее введем некоторые идеальные элементы — источники постоянного напряжения и тока, идеальные диоды и управляемые источники. Затем рассмотрим схемы замещения наиболее важных элементов для низких частот, которые составляются с помощью идеальных диодов и управляемых источников.

## **§ 1.2. Характеристики резистивных двухполюсных элементов**

подавляющее большинство нелинейных резистивных элементов представляется *электронными* или *полупроводниковыми* приборами. За редким исключением характеристики указанных приборов являются несимметричными. Большой класс двухполюсных элементов составляют диоды, имеющие резко выраженные несимметричные характеристики.

Рассмотрим характеристики резистивных *двухполюсных* элементов, относящихся к определенным типам приборов. Каждый из приборов имеет собственное условное обозначение и обычно выпускается серией типов на различные номинальные данные. Далее приведены приближенные характери-

ки, относящиеся к средним номинальным данным. Некоторые из них начерчены без соблюдения масштабов. Более полные сведения о типах, номинальных данных и характеристиках элементов можно найти в каталогах электронно-ионных и полупроводниковых приборов.

**Варистор.** Варистор представляет собой нелинейный резистивный элемент, изготавливаемый из карбида кремния с добавлением железа и фосфора. Сопротивление такого материала зависит от напряженности электрического поля — падает с возрастанием градиента.

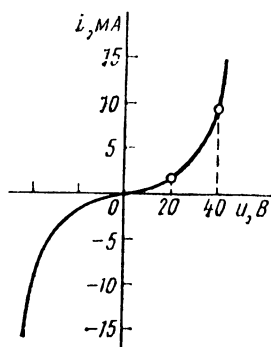


Рис. 1.5

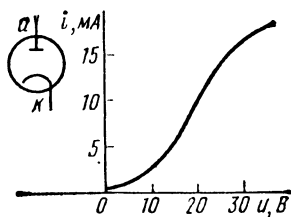


Рис. 1.6

Вольт-амперная характеристика варистора, изображенная на рис. 1.5, является симметричной, строго монотонной. Выпускаются варисторы на номинальные напряжения  $5 \div 1500$  В и токи  $2 \text{ мА} \div 1,5 \text{ А}$ .

**Электровакуумный диод.** Электровакуумный диод является прибором с двумя электродами — анодом и подогреваемым катодом, эмиттирующим электроны. На рис. 1.6 показана вольт-амперная характеристика, имеющая резко несимметричный, монотонный вид. Там же дано условное обозначение диода.

В случае приложения положительного напряжения диод пропускает ток — электроны попадают на анод. Соответствующая прямая ветвь характеристики определяется влиянием отрицательного объемного заряда. Обратный ток диода в случае приложения отрицательного напряжения практически равен нулю — обратная ветвь характеристики совпадает с отрицательной полуосью абсцисс.

**Газоразрядный промежуток.** В различных газоразрядных приборах используется явление прохождения тока между электродами, помещенными в газе с пониженным давлением.

На рис. 1.7, *a* показана вольт-амперная характеристика газоразрядного промежутка. Нижняя ветвь характеристики с очень малыми токами соответствует несамостоятельному разряду — прохождению тока здесь обусловлено движением зарядов, образованных действием внешних ионизирующих факторов.

В конце ветви ток быстро нарастает в результате ударной ионизации и образования электронных лавин. Точка *a* с напряжением зажигания  $U_z$  соответствует пробое газоразрядного промежутка, означающему переход к самостоятельному

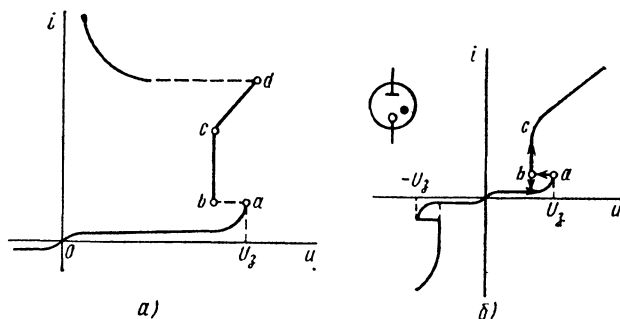


Рис. 1.7

разряду, при котором необходимые для разряда электроны образуются в процессе самого разряда. После пробоя, представляющего неустойчивую форму разряда, устанавливается нормальный тлеющий разряд; для поддержания этого вида разряда требуется меньшее напряжение, которое мало зависит от значения тока; увеличение тока происходит за счет постепенного охвата разрядом большей площади катода при почти постоянной плотности тока.

В точке *c* наступает аномальный тлеющий разряд, охватывающий всю площадь катода. Напряжение здесь повышается с увеличением тока; с ростом рассеиваемой мощности происходит разогрев катода. В точке *d* снова получается неустойчивая форма разряда, после которого устанавливается дуговой разряд с падающей вольт-амперной характеристикой. Основным механизмом создания зарядов в дуге является термоионизация. Для поддержания дугового разряда требуется меньшее напряжение, тем меньшее, чем больше ток. Характеристика газоразрядного промежутка, как видно, имеет падающие участки.

**Неоновая лампа.** Простейшим прибором, использующим тлеющий разряд, является неоновая лампа, вольт-амперная

характеристика которой с одинаковыми электродами показана на рис. 1.7, б. Характеристика является симметричной, имеет падающий участок. Следует иметь в виду, что при уменьшении тока тлеющий разряд прекращается в точке *b*, когда ток становится меньше тока зажигания. Следовательно, напряжение погасания разряда меньше напряжения зажигания — при обратном движении рабочей точки пика характеристики не будет.

**Газовый стабилитрон.** В газовом стабилитроне используется область нормального тлеющего разряда, которая характеризуется тем, что напряжение очень мало меняется при изменении тока в широких пределах. Участок *Oabc* характеристики газоразрядного промежутка (см. рис. 1.7, а) представляет вольт-амперную характеристику стабилитрона. Начальный пик характеристики определяется напряжением зажигания.

К основным параметрам газового стабилитрона относятся допустимые минимальное и максимальное значения тока, повышение напряжения между крайними значениями тока и напряжение стабилизации, соответствующее минимальному току.

**Полупроводниковый диод.** Полупроводниковый диод является прибором с одним *p-n*-переходом. Он имеет также резко выраженную несимметричную, строго монотонную характеристику, которая изображена на рис. 1.8. Там же показано условное обозначение диода.

При положительном напряжении ток на прямой ветви характеристики быстро нарастает по экспоненциальному закону, при отрицательном на обратной ветви характеристики имеется небольшой обратный ток. Этот ток, обусловленный неосновными носителями заряда, в сильной степени зависит от температуры. Температура влияет также на значение прямого тока. Промышленность выпускает большое число типов полупроводниковых диодов на разные номинальные напряжения и токи для различного назначения. Наряду с обычными выпрямительными диодами выпускаются диоды, предназначенные для работы в области высоких частот, импульсном или ключевом режиме.

**Полупроводниковый стабилитрон.** Стабилитрон представляет собой полупроводниковый диод с одним *p-n*-переходом, у которого обратный ток при некотором значении напряжения, называемого пробивным, скачкообразно возрастает. Это обусловлено явлением лавинного пробоя перехода, после которого очень незначительное повышение напряжения приводит к большому нарастанию тока. В результате ветвь обратного тока характеристики при  $u = U_{пр}$  имеет излом и очень крутой линейно изменяющийся участок (рис. 1.9). Этот участок харак-

теристики представляет наибольший практический интерес для стабилизации постоянных напряжений, а также для ограничения значения напряжений. На этом же рисунке дано условное обозначение стабилитрона.

**Туннельный диод.** Туннельный диод является двухполюсным элементом с падающим участком характеристики, обуславливающим отрицательное динамическое сопротивление. В нем также используется один  $p-n$ -переход, но с очень высокой концентрацией примесей. Из-за высокой концентрации носителей заряда толщина запирающего слоя с потенциальным барьером получается очень малой, что приводит к воз-

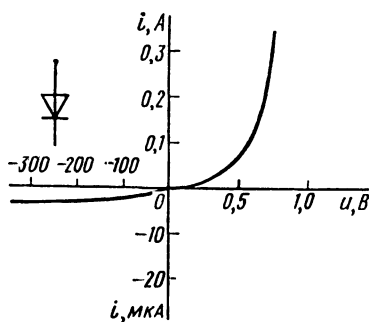


Рис. 1.3

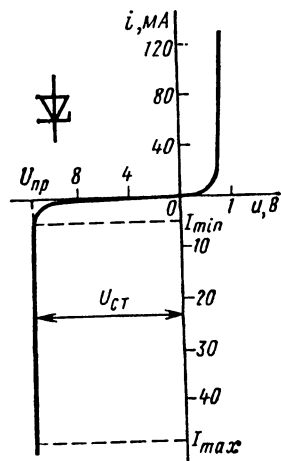


Рис. 1.9

никновению квантово-механического туннельного эффекта, в результате при небольшом прямом напряжении ток резко возрастает — на характеристике появляется «горб» тока.

На рис. 1.10, а приведены условное обозначение туннельного диода и его вольт-амперная характеристика. Для описания основных свойств характеристики туннельного диода служат следующие параметры: пиковый ток  $I_p$  и пиковое напряжение  $U_p$ ; ток  $I_v$  и напряжение  $U_v$  впадины, относящиеся соответственно к максимуму и минимуму кривой; отрицательное динамическое сопротивление —  $r_d$ ; напряжение раствора  $U_r$ , равное напряжению второй восходящей ветви характеристики при  $i = I_p$  и определяющее «ширину» наиболее важной области.

В зависимости от типа туннельного диода отношение пикового тока к току впадины составляет примерно  $5 \div 10$ . Значение пикового тока колеблется в пределах от долей и единиц до десятков и сотен миллиампер. Напряжение раствора равно  $0,5 \div 1,0$  В.

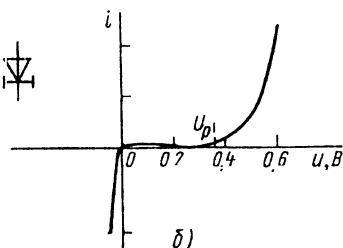
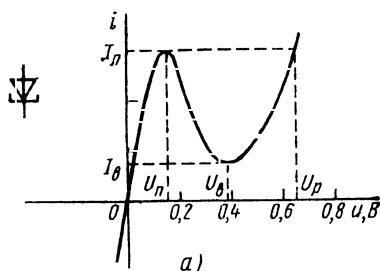


Рис. 1.10

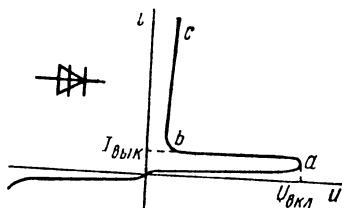


Рис. 1.11

Важное свойство туннельного диода состоит в том, что его характеристика сохраняется до очень высоких частот. Обратный ток диода получается значительным и быстро увеличивается с ростом обратного напряжения, что также обусловлено высокой концентрацией носителей заряда.

**Обращенный диод.** Туннельный диод с очень малым пиковым током, не превышающим долей миллиампера, называют *о б р а щ е н н ы м* *д и о д о м*. В обращенном диоде часто используется обратный ток, который, как у любого туннельного диода, быстро нарастает с повышением обратного напряжения. При использовании обратной ветви характеристики участок в пределах  $0 < u < U_p$  можно принять горизонтальным с нулевой ординатой, который затем переходит в быстро нарастающую прямую ветвь. Условное обозначение и вольт-амперная характеристика обращенного диода показаны на рис. 1.10, б.

**Динистор.** Динистор представляет собой четырехслойный полупроводниковый диод с тремя *p-n*-переходами. Выводами прибора являются электроды двух крайних слоев. Условное обозначение и вольт-амперная характеристика динистора показаны на рис. 1.11. На начальной части прямой ветви, соответствующей отключенному состоянию прибора, очень небольшой ток медленно растет с повышением напряжения. С приближением напряжения к  $U_{вкл}$  ток быстро нарастает. При  $u = U_{вкл}$  происходит включение прибора — напряжение при неизменном значении тока, называемого *т о к о м* *в к л ю ч е н и я*, скачком падает до участка характеристики, соответствующего включенному состоянию прибора. На этом участке

незначительное по значению напряжение на приборе медленно нарастает с увеличением тока. Напряжение на диоде, соответствующее максимально допустимому току, называют остаточным.

Для выключения динистора необходимо снизить ток до  $i \leq I_{\text{вык}}$ .

### § 1.3. Управляемые двух- и трехполюсные резистивные элементы

Управляемые двух- и трехполюсные резистивные элементы представляют также большой класс.

*Управляемым резистивным двухполюсником* называют элемент, вольт-амперная характеристика которого зависит от некоторой величины. Эта величина, называемая *управляющей*, не является переменной цепи, в которую включен элемент. Управляющими переменными могут быть любые физические величины: температура, давление, освещенность, напряженность магнитного поля и т. п.

Управляемые двухполюсные устройства, называемые также *датчиками*, преобразуют неэлектрические величины в электрические (напряжение или ток). Они широко применяются в качестве измерительных элементов в автоматике и других областях. В отличие от обычных неуправляемых двухполюсных элементов, рассмотренных в предыдущем параграфе, управляемые двухполюсные элементы имеют не одну характеристику, а семейство характеристик, каждая из которых снимается при некотором заданном постоянном значении управляющей величины.

*К управляемым трехполюсным резистивным элементам* относятся такие важные устройства с тремя выводами, как транзисторы, электровакуумные триоды и т. д. Прежде чем приводить данные, определяющие трехполюсные элементы, необходимо предварительно дать пояснения к ним, так как определение характеристик здесь усложняется.

*Трехполюсник* (рис. 1.12) представляет собой частный случай четырехполюсника, у которого один вывод является общим для входа и выхода. Из шести величин — напряжений и токов трех выводов (рис. 1.12, а) — независимыми являются четыре: два соотношения, связывающие переменные, можно получить с помощью законов Кирхгофа.

Из равенства нулю суммы токов трех выводов можно выразить ток общего вывода (вывода 3) через токи входа и выхода:

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0; \quad i_3 = -(i_1 + i_2).$$



Из равенства нулю суммы напряжений между тремя выводами можно выразить напряжение  $u_{12}$  через напряжения входа и выхода по отношению к общему выводу:

$$u_{12} = u_{13} - u_{23} = (u_1 - u_3) - (u_2 - u_3) = u_1 - u_2.$$

Напряжение  $u_3$  можно принять равным нулю, т. е. заземлить вывод 3.

Поведение трехполюсного элемента (рис. 1.12, б) будет определяться соотношениями между четырьмя величинами — напряжениями и токами на входе  $u_1$ ,  $i_1$  и выходе  $u_2$ ,  $i_2$ . Эти соотношения

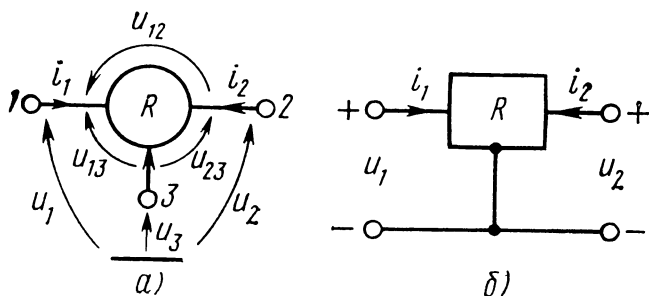


Рис. 1.12

можно представить в виде системы двух уравнений, связывающих одну из пар указанных переменных с другой парой, выбранной в качестве независимых переменных. Число систем таких уравнений, как известно, равно шести — числу сочетаний четырех элементов по два.

В отличие от известных уравнений линейных четырехполюсников, коэффициенты или параметры которых постоянны, в случае нелинейных трехполюсников имеем систему нелинейных уравнений. Так как число уравнений равно двум, то поведение трехполюсного элемента можно описать двумя характеристиками. Каждое из уравнений любой системы выражает зависимость одной переменной от двух независимых переменных. Геометрически эту зависимость можно представить поверхностью в трехмерном пространстве. Следовательно, две характеристики трехполюсника представляются двумя поверхностями в трехмерном пространстве.

Чтобы иметь возможность изображать характеристики в виде обычных двумерных графиков на плоскости, одну из независимых переменных принимают за фиксированный управляющий параметр. Придавая различные значения этому пара-

метру, получают семейство характеристик. Каждая из них представляет след пересечения упомянутой выше поверхности в трехмерном пространстве с плоскостью, перпендикулярной координатной оси переменной, принятой за управляющий параметр.

Для нелинейных трехполюсников удобно применять следующие два вида уравнений: 1) уравнение, выражающее одну из входных величин (ток или напряжение) через другую входную величину (напряжение или ток) и одну из выходных величин (ток или напряжение); 2) уравнение, выражающее одну из выходных величин (напряжение или ток) через другую выходную величину (ток или напряжение) и одну из входных величин (напряжение или ток).

Принимая за входную или выходную величину напряжение или ток, получим четыре системы уравнений трехполюсника:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= F_1(i_1, u_2); & u_1 &= F_3(i_1, i_2); \\ i_2 &= F_2(i_1, u_2); & u_2 &= F_4(i_1, i_2); \\ i_1 &= F_5(u_1, u_2); & i_1 &= F_7(u_1, i_2); \\ i_2 &= F_6(u_1, u_2); & u_2 &= F_8(u_1, i_2). \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Каждая система уравнений описывает свойства одного и того же трехполюсника, поэтому достаточно рассмотреть одну из них, например первую. Если в первом уравнении положить  $u_2 = \text{const}$ , то получим входную характеристику — зависимость между входными величинами:  $i_1 = i_1(u_1)$  при постоянстве одной из выходных величин — напряжения  $u_2$ . Если во втором уравнении положить  $i_1 = \text{const}$ , то получим выходную характеристику — зависимость между выходными величинами:  $i_2 = i_2(u_2)$  при постоянстве одной из входных величин — тока  $i_1$ . Входная и выходная характеристики полностью определяют свойства нелинейного трехполюсника.

Рассмотрим характеристики некоторых конкретных управляемых двух- и трехполюсных резистивных элементов.

**Фотодиод.** Фотодиод представляет собой полупроводниковый диод с одним *p-n*-переходом, обратный ток которого увеличивается при действии внешнего излучения на область *p-n*-перехода в результате создания дополнительных носителей заряда из-за фотоэффекта.

На рис. 1.13 представлено семейство вольт-амперных характеристик фотодиода в зависимости от светового потока  $\Phi$  определенной длины волны. При  $\Phi = 0$  имеем обычный обратный ток диода; световой поток  $\Phi$  является управляющим параметром.

**Терморезистор (термистор).** Термистор представляет собой полупроводниковый резистивный элемент, изготавливаемый из смеси окислов различных металлов и имеющий очень высокий отрицательный температурный коэффициент сопротивления — при повышении температуры на  $100^\circ\text{C}$  сопротивление снижается в сотни раз. Температура материала при постоянстве температуры внешней среды зависит от тока.

Очень сильная температурная зависимость сопротивления приводит к тому, что вольт-амперная характеристика термистора, начиная с некоторого значения тока, имеет падающий

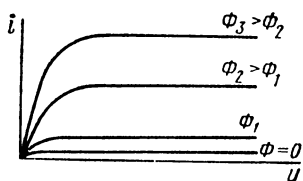


Рис 1.13

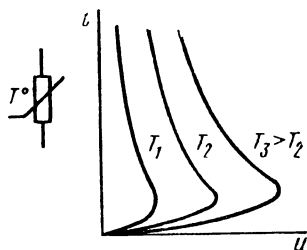


Рис. 1.14

участок — напряжение на элементе падает, несмотря на увеличение тока. На рис. 1.14 дано условное обозначение и семейство вольт-амперных характеристик термистора при различных значениях температуры внешней среды, которая играет роль управляющего параметра.

Так как характеристика термистора определяется тепловыми процессами, постоянная времени элемента составляет десятки секунд. Термистор является инерционным элементом — его нелинейные свойства проявляются только при очень медленных изменениях тока. Существуют также термисторы с положительным температурным коэффициентом сопротивления, называемые **позисторами**.

**Тиристоры.** Тиристор, так же как и динистор, представляет собой четырехслойный полупроводниковый диод с тремя  $p$ - $n$ -переходами, но в отличие от динистора тиристор кроме двух главных выходов электродов крайних слоев (анода и катода) имеет третий управляющий вывод — затвор, присоединенный к электроду одного из средних слоев.

При отсутствии управляющего тока ( $i_3 = 0$ ) характеристики тиристора и динистора получаются одинаковыми (рис. 1.15, а). Но при  $i_3 > 0$  происходит уменьшение напряжения включения. Поэтому с помощью управляющего тока

можно управлять моментом включения тиристора. На этом роль управляющего электрода заканчивается — ток во включенном состоянии тиристора протекает и после прекращения тока затвора. Прекратить анодный ток и восстановить выключенное состояние тиристора можно только путем снижения тока в приборе ниже критического значения, определяемого точкой *b*. Так как управляется в тиристоре только момент включения, его называют полупроводящим прибором.

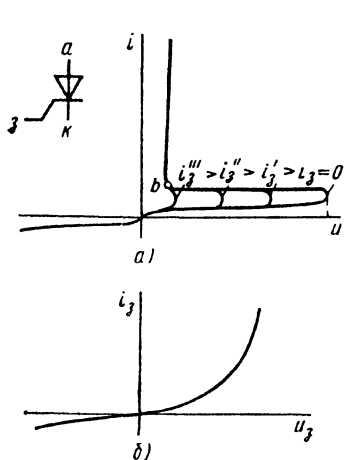


Рис. 1 15

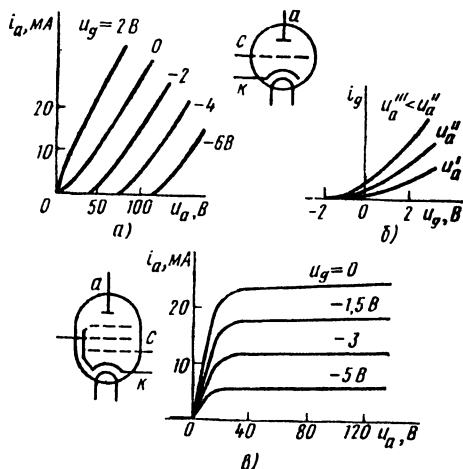


Рис 1 16

На рис. 1 15, б приведена входная характеристика тиристора — зависимость тока затвора от напряжения. Как видно, входная характеристика не зависит от выходных величин.

**Электровакuumный триод.** Электровакuumный триод имеет три электрода: подогреваемый прямо или косвенно катод, эмиттирующий электроны; сетку, управляющую электронным потоком; анод, на который попадают электроны.

Выходные (анодные) характеристики триода — зависимости между напряжением и током анодной цепи, снятые при нескольких неизменных значениях напряжения между сеткой и катодом, изображены на рис. 1.16, а, а входные характеристики триода — зависимости между напряжением и током сетки, снятые при нескольких неизменных значениях анодного напряжения, — на рис. 1 16, б. Здесь же показано условное обозначение триода.

**Электронная лампа — пентод.** Пентод представляет собой

электронную лампу, которая кроме анода, катода и управляющей сетки имеет две дополнительные сетки — экранирующую и защитную. Наличие дополнительных сеток заметно влияет на выходные (анодные) характеристики, которые вместе с условным обозначением пентода изображены на рис. 1.16, в. Входные характеристики пентода практически не отличаются от входных характеристик триода.

**Биполярный транзистор.** Транзистор типа  $p-n-p$  или  $n-p-n$ , который состоит из двух встречных  $p-n$ -переходов, полученных

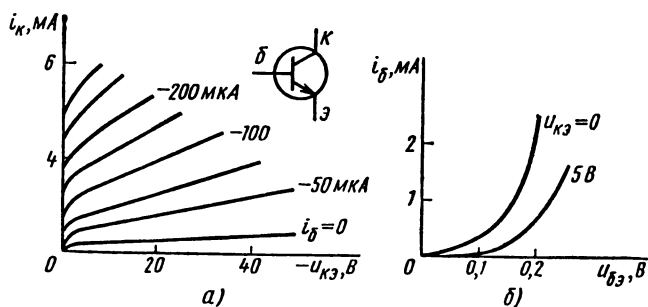


Рис. 1.17

в монолите полупроводника методами диффузии или вплавления, называют б и п о л я р н ы м. Вывод среднего слоя называют б а з о й, а выводы крайних слоев с одинаковым типом электропроводности — э м и т т е р о м и к о л л е к т о р о м.

Характеристики транзистора зависят от схемы его включения. Наиболее часто применяется включение с общим эмиттером, когда входом является база, а выходом — коллектор. На рис. 1.17, а приведены выходные характеристики — зависимости коллекторного тока от напряжения между коллектором и эмиттером, снятые при ряде неизменных значений тока базы. Входные характеристики для этой же схемы включения — зависимости тока базы от напряжения между базой и эмиттером при неизменных значениях напряжения на коллекторе показаны на рис. 1.17, б. Как видно из кривых, выходное напряжение между коллектором и эмиттером слабо влияет на входные характеристики.

**Полевой (униполярный) транзистор.** Главной частью полевого транзистора является проводящий канал в виде пластины из полупроводникового  $n$ -материала, охватываемого с двух противоположных плоских сторон  $p$ -материалом. Электроды с

двух торцов  $n$ -канала называются истоком и стоком, а электрод  $p$ -материала — затвором.

Ток, проходящий вдоль канала от стока к истоку, является выходным. Управление выходным током производится подачей между затвором и стоком отрицательного напряжения, смещающего  $p$ - $n$ -переход в обратном направлении и сужающего канал из-за действия отрицательного объемного заряда в  $n$ -области. Так как управляющий  $p$ - $n$ -переход смещен в обрат-

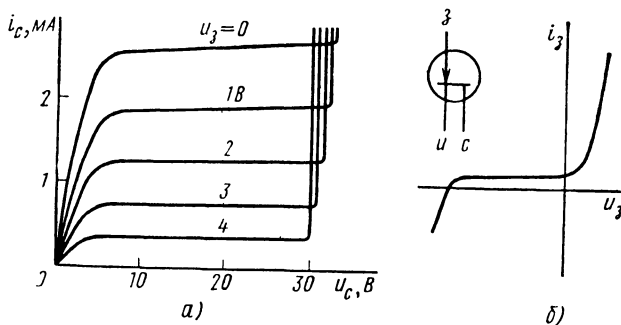


Рис. 1.18

ном направлении, входной ток (ток затвора) получается очень малым, а входное сопротивление — большим.

На рис. 1.18, а показаны выходные характеристики полевого транзистора — зависимость тока стока от напряжения стока при нескольких неизменных значениях напряжения затвора. Скачок тока при больших напряжениях вызывается лавинным пробоем канала. Входная характеристика полевого транзистора (рис. 1.18, б) не зависит от выходных величин.

Существует другой тип полевого транзистора — МОП-транзистор со структурой металл—окисел (диэлектрик) — полупроводник, в котором затвор изолирован от канала. Изменение напряжения затвора приводит также к изменению концентрации заряда и тока в канале.

#### § 1.4. Некоторые виды идеализированных нелинейных элементов

Рассмотрим в дополнение к приведенным характеристикам реальных элементов характеристики и свойства следующих видов идеализированных нелинейных элементов: источники постоянного напряжения и тока, идеальный диод и идеальный управляемый источник. Эти элементы понадобятся для составле-

ния схем замещения ряда нелинейных резистивных элементов.

**Источники постоянного напряжения и тока.** В теории цепей источники напряжения и тока принято рассматривать как источники приложенных к цепи сигналов, которые входят в правые части уравнений в виде заданных независимых переменных, возбуждающих цепь.

В теории нелинейных цепей часто удобно и источники постоянного напряжения и тока рассматривать как *нелинейные резистивные* элементы. Свойства источников постоянного напряжения и тока определяются зависимостями между напряжением и током, т. е. вольт-амперными характеристиками. Поэтому указанные источники можно отнести к классу двухполюсных резистивных элементов.

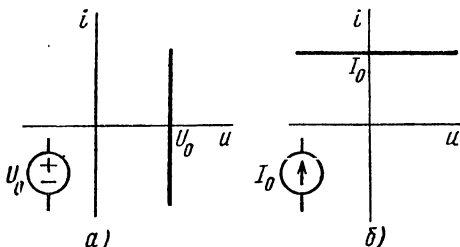


Рис. 1.19

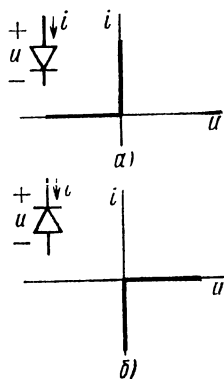


Рис. 1.20

Источник напряжения имеет единственный параметр — напряжение на выводах  $U_0$ , которое не зависит от тока и времени. Вольт-амперная характеристика изображается прямой, проведенной параллельно оси ординат на расстоянии  $U_0$  (рис. 1.19, а). В режиме генерирования энергии, когда ток в источнике направлен в сторону повышения напряжения, характеристика располагается во втором или четвертом (при перемене полярности) квадранте. Следовательно, источник напряжения является активным элементом.

Источник тока также определяется одним параметром — током в выводах  $I_0$ , который не зависит от напряжения и времени. Вольт-амперная характеристика изображается прямой, проведенной параллельно оси абсцисс на расстоянии  $I_0$  (рис. 1.19, б). В режиме генерирования энергии, когда положительную полярность имеет вывод, из которого ток вытекает, характеристика будет располагаться во втором или четвертом

квадранте — источник тока также является активным элементом.

Прямые, которые изображают характеристики источников постоянного напряжения и тока, *не проходят через начало координат*, поэтому они должны быть отнесены к *нелинейным* характеристикам.

**Идеальный диод.** Очень важным идеализированным нелинейным элементом является идеальный диод, символическое изображение которого приведено на рис. 1.20. Идеальный диод можно получить идеализацией реального диода, если пренебречь падением напряжения на диоде в прямом направлении и током диода в обратном направлении.

Отсутствие обратного тока в случае приложения обратного или отрицательного напряжения означает, что при  $u < 0$  обратная ветвь характеристики направлена по оси абсцисс. Отсутствие падения напряжения при протекании прямого тока означает, что при  $i > 0$  прямая ветвь характеристики направлена по оси ординат. Следовательно, *характеристика идеального диода состоит из двух перпендикулярных линейных участков, совпадающих с полуосьями координат*; точка излома располагается в начале координат (рис. 1.20, а).

Аналитически характеристику идеального диода можно записать таким образом:

$$\begin{aligned} u &= 0 & \text{при } i > 0; \\ i &= 0 & \text{при } u < 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

В первом случае идеальный диод соответствует короткому замыканию в проводящем состоянии, во втором — холостому ходу в непроводящем состоянии.

Мощность, потребляемая элементом, очевидно, равна нулю при любых значениях напряжения и тока:

$$p = ui = 0.$$

Так как характеристика диода несимметрична, при перемещении выводов, т. е. при встречном включении, получим другую характеристику (рис. 1.20, б). Нетрудно убедиться, что она дуальна исходной характеристике (рис. 1.20, а) диода, включенного в прямом направлении.

Отсюда следует вывод: *элементом, дуальным идеальному диоду, является также идеальный диод, но со встречно включенными выводами.*

**Идеальный управляемый источник.** Управляемый источник представляет четырехполюсный резистивный элемент, состоящий из двух ветвей и двух пар выводов: входной и выход-



ной. Выходом элемента является управляемый или зависимый источник напряжения или тока. Напряжение или ток выходного управляемого источника не является заданной величиной, не зависящей от режима цепи, как при обычном независимом источнике, а зависит от действующего на входе управляющего сигнала. Управляющий сигнал может быть напряжением любой пары узлов или током любой ветви цепи.

Для линейного управляемого источника, наиболее часто используемого в различных схемах замещения, значение напряжения или тока выходного источника пропорционально управ-

ляющему сигналу. Потери, а также накопление энергии во входной цепи идеального управляемого источника должны отсутствовать. Поэтому если управляющим сигналом является напряжение, то на входе должен быть холостой ход (разрыв); если ток — то короткое замыкание.

На рис. 1.21 управляемые источники обозначены

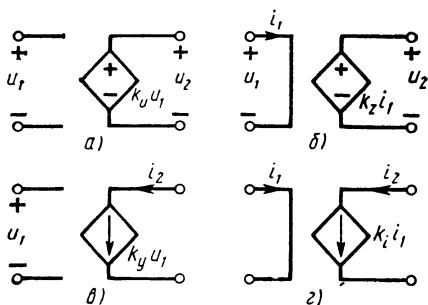


Рис. 1.21

ны ромбом в отличие от обычных источников. Свойство зависимости источника отражает запись рядом с ромбом величины напряжения или тока, пропорциональной управляющему сигналу.

В зависимости от того, каким источником (напряжения или тока) является выход и какой переменной (напряжением или током) является управляющий сигнал, различают следующие четыре типа управляемых источников:

1) источник напряжения, управляемый напряжением (рис. 1.21, а):

$$u_2 = k_u u_1; \quad (1.3)$$

2) источник напряжения, управляемый током (рис. 1.21, б):

$$u_2 = k_z i_1; \quad (1.4)$$

3) источник тока, управляемый напряжением (рис. 1.21, в):

$$i_2 = k_y u_1; \quad (1.5)$$

4) источник тока, управляемый током (рис. 1.21, г):

$$i_2 = k_i i_1. \quad (1.6)$$

Коэффициенты  $k$ , входящие в основные соотношения управляемых источников, называются управляющими параметрами. Они либо безразмерны ( $k_u$  и  $k_i$ ), либо имеют размерности сопротивления ( $k_z$ ) и проводимости ( $k_y$ ).

Для линейных управляемых источников управляющие параметры являются постоянными, для нелинейных источников они зависят от управляющего сигнала.

Очень полезно обобщить понятие управляемых источников на случай, когда управляющим сигналом является неэлектрическая величина  $x$ , например температура, освещенность, давление, ускорение и т. п. При этом напряжение и ток управляемого источника будут зависеть не от переменных цепи, а от внешних факторов. Указанное обобщение позволяет составить схемы замещения резистивных элементов типа датчиков, управляемых воздействиями неэлектрической природы.

## § 1.5. Функциональные блоки

В состав огромного числа применяемых на практике электронных схем и систем входят некоторые типовые узлы или элементы, выполняющие одинаковые функции над поступающими сигналами, т. е. вполне определенные преобразования сигналов. Нет необходимости в каждом случае собирать или изготавливать схемы соответствующих преобразователей — целесообразно иметь готовые функциональные или преобразовательные блоки.

Промышленностью серийно выпускаются различные *функциональные модули или блоки*, предназначенные для выполнения определенных функций (операций) или преобразования сигналов и рассчитанные для массового применения. Современная интегральная технология позволяет получать модули или микросхемы со сложной структурой в виде отдельных блоков в монолитном микроминиатюрном исполнении, которые имеют высокую надежность и низкую стоимость. Характеристики готовых функциональных блоков задаются по отношению в выводам входов и выходов — для применения схема и ее внутренняя структура не имеют значения. Поэтому функциональный блок, в принципе, может рассматриваться, как и любой другой известный нам элемент цепи: двухполюсный — индуктивный, емкостный, резистивный или многополюсный — зависимый источник, трансформатор.

Рассмотрим некоторые из широко используемых аналоговых функциональных блоков: операционный усилитель, компаратор, умножитель.

**Операционный усилитель.** Операционный усилитель (ОУ) является особым видом усилителя напряжения, т. е. управляемого напряжением источника напряжения, имеющего следующие особенности: а) очень высокий коэффициент усиления, достигающий значений  $K_u = (0,2 \div 1,0) \cdot 10^6$ ; б) очень высокое входное сопротивление; в) малое выходное сопротивление.

Устойчивая работа усилителя со столь высоким усилением обеспечивается соответствующими цепями обратной связи. Ра-

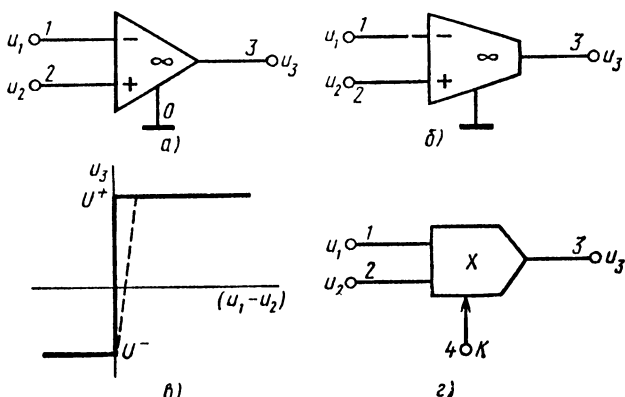


Рис. 1.22

бочий диапазон частот включает в себя нулевую частоту, т. е. постоянное напряжение, и простирается до частот порядка мегагерца. Уровень выходного сигнала при обычном напряжении питания около 15 В составляет примерно 10 В.

Наиболее распространен ОУ с *дифференциальным входом*, условное обозначение которого приведено на рис. 1.22, а. ОУ имеет четыре вывода для переменной составляющей сигнала: входные — 1 (инвертирующий) и 2 (неинвертирующий), выходной — 3 и общий — 0. Выходное напряжение определяется разностью напряжений  $u_{12} = u_1 - u_2$  входных выводов. Поведение идеализированного ОУ, как и любого электронного устройства, в общем случае нелинейно. Но обычный ОУ используется для работы в линейном режиме.

Свойства ОУ получаются близкими к *идеальному ОУ*, которому приписывают бесконечное усиление, нулевой входной ток и нулевое выходное сопротивление. Уравнения такого усилителя можно записать так:

$$\begin{aligned} i_1 &= i_2 = 0; \\ u_3 &= k(u_1 - u_2), \quad k \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (1.7)$$

ОУ выпускается по интегральной технологии серийно в монолитном исполнении и имеют низкую стоимость. Поэтому ОУ широко применяются на практике, являясь основным элементом почти любых аналоговых электронных схем, в частности схем преобразователей сопротивлений и характеристик нелинейных элементов.

**Компараторы.** Компаратор представляет собой операционный усилитель, специально рассчитанный для работы в нелинейном режиме — характеристика выходного напряжения имеет участок резкого насыщения, на котором напряжение остается почти постоянным. Так же как дифференциальный ОУ, компаратор, символическое изображение которого приведено на рис. 1.22, б, имеет два входных вывода с напряжениями  $u_1$  и  $u_2$  и один выходной вывод с напряжением  $u_3$ . Коэффициент усиления в линейной области достигает значений  $10^5$  и выше. Поэтому при очень малом напряжении на входе  $u_{12} = u_1 - u_2$  достигается насыщение и зависимость  $u_3 = f(u_1 - u_2)$  получается близкой к характеристике идеального компаратора (рис. 1.22, в), которая при  $u_1 < u_2$  имеет низкий уровень  $U^-$ , а при  $u_1 > u_2$  — скачком принимает высокий уровень  $U^+$ . Следовательно, *кусочно-линейная характеристика идеального компаратора может быть записана в виде*

$$u_3 = \begin{cases} U^- & u_1 < u_2; \\ U^+ & u_2 < u_1. \end{cases} \quad (1.8)$$

У реальных компараторов крутизна нарастания характеристики конечна — имеется очень небольшой участок линейного нарастания напряжения от  $U^-$  до  $U^+$  шириной порядка милливольт (пунктирная линия на рис. 1.22, в).

Очень важной для практических применений динамической характеристикой является *время перехода* выходного напряжения от низкого к высокому уровню от момента приложения ко входу ступенчатого напряжения — это время очень мало — порядка нескольких сотых долей микросекунды.

Компараторы широко применяются в различных устройствах нелинейного преобразования сигналов в импульсных устройствах.

**Аналоговый умножитель.** Идеальный аналоговый умножитель представляет собой усилитель с двумя входными выводами с напряжениями  $u_1$ ,  $u_2$  и одним выходным выводом, напряжение которого пропорционально произведению входных напряжений:

$$u_3 = Ku_1^{-1}u_2. \quad (1.9)$$

Символическое изображение умножителя приведено на рис. 1.22, г. Дополнительный ввод 4 служит для подвода постоянного напряжения смещения для установки нужной величины коэффициента  $K$  с таким расчетом, чтобы амплитуда выходного напряжения не вышла за допустимые границы.

Умножители выполняются на усилителях напряжения с переменным коэффициентом усиления, изменяющимся пропорционально напряжению  $u_2$  — это обстоятельство и приводит к основной характеристике (1.9).

У реальных умножителей всегда имеется погрешность в выполнении операции умножения (1.9), зависящая от частоты или быстроты изменения, а также уровня подведенных сигналов, температуры и т. п. Кроме того, диапазон частот перемножаемых сигналов не превышает нескольких килогерц, а входное сопротивление конечно.

С помощью модуля-умножителя легко получить устройства *возведения функций сигналов в целые степени*. Устройство возведения функции в квадрат получается с помощью одного умножителя при параллельном соединении обоих выводов входа и подведении к ним напряжения  $u_1 = u_2$ , когда на выходе умножителя имеем  $u_3 = u_1^2/K$ . Каскадное соединение таких устройств позволяет получить устройства возведения в четные степени  $2n$ , где  $n$  — число умножителей с параллельно соединенными входами: на выходе последнего каскада  $u_3 = K^{-n} u_1^{2n}$ .

Для получения устройства возведения в нечетные степени следует подвести ко входу 1 выходного умножителя сигнал  $u_1$ , а ко входу 2 — напряжение  $u_2 = K^{-n} u_1^{2n}$  от выхода  $n$  каскадов возведения в четные степени. На выходе такого устройства получим напряжение  $u_3 = K^{-(n+1)} u_1^{2n+1}$ . Применяя обратные связи, можно получить устройства возведения функции в дробные степени.

Устройства возведения функций в степени применяются в схемах умножения частоты, преобразования спектров сигналов и т. д.

## § 1.6. Аналитическое представление характеристик

Как указывалось, характеристики нелинейных элементов задаются в виде кривых или графиков, построенных по экспериментальным данным. Но для аналитических методов расчета нелинейных цепей характеристики элементов должны быть представлены аналитическими выражениями.

Аналитическое представление функций, заданных в виде графиков или таблиц, возможно только приближенно. Как правило, чем выше требования к точности представления, тем

сложнее получается нужное аналитическое выражение характеристики и тем труднее решение уравнений, полученных на основе этого выражения. Поэтому необходим компромиссный выбор между усложнением функции и точностью приближения.

Точность приближения, которая может быть достигнута с помощью выбранной функции, существенно зависит от величины промежутка, в пределах которого производится приближение или аппроксимация. Чем шире промежуток, тем меньше точность. Поэтому следует предварительно оценить границы промежутка и производить приближение только в пределах ожидаемого изменения переменных. Не имеет смысла, конечно, стремиться к точности приближения, превышающей пределы разброса и неустойчивости характеристик, а также точности их снятия.

Следующий важный вопрос — это выбор аппроксимирующей функции. В качестве аппроксимирующих принимают различные функции: степенные полиномы, кусочно-линейные функции, экспоненциальные полиномы, рациональные дроби, некоторые трансцендентные функции. На выбор той или иной функции влияет вид конкретной характеристики. Например, прямой ток полупроводникового диода с электронно-дырочным переходом очень хорошо передается простейшим экспоненциальным полиномом  $i = A [\exp(au) - 1]$ , поскольку к такому закону приводит количественный анализ физических процессов в переходе. Из трансцендентных функций находят применение гиперболический синус и гиперболический тангенс. Однако для трансцендентных функций трудно находить их коэффициенты или параметры из условия приближения.

Более подробно остановимся на приближении заданных графически или таблично характеристик с помощью степенных полиномов и кусочно-линейных функций. Достоинствами указанных функций являются возможность представления почти любых видов характеристик и относительная простота нахождения коэффициентов.

**Степенное приближение.** Алгебраический полином степени  $n$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad (1.10)$$

имеет  $n + 1$  коэффициентов. Эти коэффициенты должны быть определены из условия приближения, которое состоит в том, чтобы ошибка, равная отклонению полинома от подлежащей аппроксимации характеристики  $g(x)$ , не превышала некоторого заданного значения. Предельно допустимая ошибка долж-

на задаваться с учетом требования точности, предъявляемой к расчету, а также точности снятия, возможного разброса и нестабильности характеристики

В теории приближения функций существуют различные критерии определения ошибок и соответственно различные методы нахождения коэффициентов искомого полинома из условия минимизации ошибки. В данном случае, когда требуется аппроксимировать функцию, заданную в виде графика или таблицы, и, кроме того, необходимо по возможности упростить процесс вычислений, заслуживают более подробного рассмотрения два метода приближения: интерполяция и дискретное среднеквадратичное приближение.

**1 И н т е р п о л я ц и я.** При интерполяции искомые коэффициенты определяют из условия совпадения аппроксимирующего полинома и аппроксимируемой характеристики в заранее выбранных различных точках (узлах) промежутка приближения. Условие совпадения значений обеих функций в  $n + 1$  узлах  $x_i$  дает систему  $n + 1$  линейных уравнений, необходимых для однозначного определения всех искомых коэффициентов полинома:

$$y = \sum_{k=0}^n a_k x_i^k = g(x_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (1.11)$$

Следовательно, число узлов равно числу коэффициентов, т. е. определяется степенью полинома.

Рассмотрим в качестве примера интерполяцию полиномом второй степени

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

характеристики варистора (см. рис. 1.5) в промежутке приближения  $0 \leq x = u \leq 40$  В. Задавшись тремя узлами, имеем для них следующие значения токов в миллиамперах

$$x_0 = 0; \quad g_0 = 0; \quad x_1 = 20, \quad g_1 = 1,5; \quad x_2 = 40; \quad g_2 = 9,0.$$

Узел  $x_0 = 0$  дает  $a_0 = 0$ . Два остальных узла дают систему из двух уравнений:

$$20 a_1 + 400 a_2 = 1,5;$$

$$40 a_1 + 1600 a_2 = 9,0.$$

В результате решения системы имеем  $a_1 = -3/40$  и  $a_2 = 3/400$ , так что аппроксимирующий полином окончательно запишется в виде

$$y = -3x/40 + 3x^2/400.$$

Можно избежать решения системы линейных уравнений, если воспользоваться интерполяционной формулой Лагранжа:

$$y(x) = \sum g_m \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{m-1})(x - x_{m+1}) \dots (x - x_n)}{(x_m - x_0) \dots (x_m - x_{m-1})(x_m - x_{m+1}) \dots (x_m - x_n)} \quad (1.12)$$

Для рассмотренного примера достаточно произвести суммирование для индексов  $m = 1$  и  $m = 2$ :

$$y(x) = 1,5 \frac{x(x-40)}{20(20-40)} + 9,0 \frac{x(x-20)}{40(40-20)}.$$

После преобразований получим найденный ранее полином.

Недостаток интерполяции состоит в том, что ошибка в промежутках между узлами не контролируется и в некоторых случаях отклонение значений полинома от характеристики может оказаться большим. Кроме того, степень полинома и число узлов интерполяции жестко связаны, что иногда приводит к высокой степени полинома.

2. Д и с к р е т н о е с р е д н е к в а д р а т и ч н о е п р и б л и ж е н и е. Заданы значения  $g_i$  аппроксимируемой характеристики, соответствующие  $m + 1$  различным значениям  $x_i$  аргумента. В случае приближения по методу наименьших квадратов коэффициенты полинома  $y(x)$  определяют из условия обращения в минимум суммы квадратов ошибок в каждой точке:

$$\epsilon^2 = \sum_{k=0}^m \left[ \sum_{i=0}^n a_k x_i^k - g_i \right]^2. \quad (1.13)$$

Для определения коэффициентов  $a_k$  полинома, входящих в (1.13), из условия минимума  $\epsilon^2$  следует приравнять нулю частные производные по всем  $n + 1$  коэффициентам:

$$\frac{\partial \epsilon^2}{\partial a_l} = 2 \sum_{i=0}^m \left[ \sum_{k=0}^n a_k x_i^k - g_i \right] x_i^l = 0 \quad (l = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Отсюда получим систему уравнений для определения коэффициентов:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=0}^m x_i^{k+l} &= \sum_{i=0}^m \left( \sum_{k=0}^n a_k x_i^{k+l} \right) = \\ &= \sum_{i=0}^m g_i x_i^l \quad (l = 0, 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Введя обозначения

$$\sum_{i=0}^m x_i^{k+l} = \alpha_{lk}; \quad \sum_{i=0}^m g_i x_i^l = \beta_l, \quad (1.14)$$

систему линейных уравнений можно записать как

$$\sum_{k=0}^n \alpha_{lk} a_k = \beta_l \quad (l = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (1.15)$$



Решение этой системы дает искомые значения коэффициентов полинома.

Степень полинома в отличие от интерполяции не связана с числом заданных дискретных значений аппроксимируемой характеристики. При относительно гладкой форме характеристики приближение получается вполне удовлетворительным, близким к наилучшему равномерному приближению.

В качестве примера дискретного среднеквадратического приближения рассмотрим снова полиномиальное представление характеристики *варистора*, но в промежутке приближения  $-40 \leq u = x \leq 40$ . Так как промежуток приближения и сама характеристика являются нечетными, нечетным должен быть также аппроксимирующий полином: он должен содержать члены только с нечетными степенями. При этом достаточно выполнить приближение для одной половины промежутка.

Характеристика варистора в промежутке приближения  $0 \leq u \leq 40$  В определяется следующей таблицей значений ( $m = 4$ ):

$x_i$ , В	0	10	20	30	40
$g_i$ , мА	0	0,5	1,5	4,0	9,0

Приближение произведем нечетным полиномом третьей степени:

$$y(x) = a_1 x + a_3 x^3.$$

Вычислим коэффициент системы уравнений (1.15).

Коэффициенты, входящие в левые части уравнений, согласно (1.14) для нечетных индексов ( $l = 1; 3$ ):

$$a_{11} = \sum_{i=0}^4 x_i^2 = 30 \cdot 10^2;$$

$$a_{13} = a_{31} = \sum_{i=0}^4 x_i^4 = 354 \cdot 10^4,$$

$$a_{33} = \sum_{i=0}^4 x_i^6 = 4890 \cdot 10^6.$$

Коэффициенты, входящие в правые части уравнений:

$$\beta_1 = \sum_{i=0}^4 g_i x_i = 515;$$

$$\beta_3 = \sum_{i=0}^4 g_i x_i^3 = 696,5 \cdot 10^3$$

Уравнения для нахождения коэффициентов полинома запишем в виде

$$3a_1 + 3540a_3 = 0,515;$$

$$3,54a_1 + 4890a_3 = 0,6965.$$

Решение этой системы дает:  $a_1 = 2,457 \cdot 10^{-2}$ ;  $a_3 = 1,247 \cdot 10^{-4}$ .

Искомый аппроксимирующий полином

$$y = 2,457 \cdot 10^{-2}x + 1,274 \cdot 10^{-4}x^3.$$

Рассмотрим более сложный пример среднеквадратичного приближения характеристики *туннельного диода*. Характеристику зададим следующей таблицей соответствий между нормированными значениями аргумента и функции:

$x_i$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$g_i$	0	1	0,5	0,2	0,4	1

Приближение произведем полиномом третьей степени, обращаясь в нуль при  $x = 0$ :

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

Вычислив коэффициенты согласно (1.14), получим систему уравнений

$$3,850a_1 + 3,025a_2 + 2,533a_3 = 3,136;$$

$$3,025a_1 + 2,533a_2 + 2,208a_3 = 2,327;$$

$$2,533a_1 + 2,208a_2 + 1,978a_3 = 1,975.$$

Решение этой системы дает:  $a_1 = 6,788$ ;  $a_2 = -17,805$ ;  $a_3 = 12,182$ . Искомый полином

$$i(u) = 6,788u - 17,805u^2 + 12,182u^3.$$

Отклонение полинома при  $x = x_i$  от заданных значений  $g_i$  не превышает 0,12.

**Кусочно-линейное приближение.** Кусочно-линейное приближение основано на замене отдельных участков характеристики отрезками прямых. Такая замена может быть осуществлена с помощью несложных графических построений, как показано на рис. 1.23.

Точность представления зависит от числа интервалов линейного приближения в заданном промежутке. При заданном максимально допустимом отклонении кусочно-линейной аппроксимации от характеристики число интервалов зависит от вида характеристики. Для упрощения расчетов с применением рассматриваемого приближения желательно, конечно, иметь минимальное число линейных интервалов.

Полученное кусочно-линейное представление характеристики полностью определяется координатами  $(u_k, i_k)$

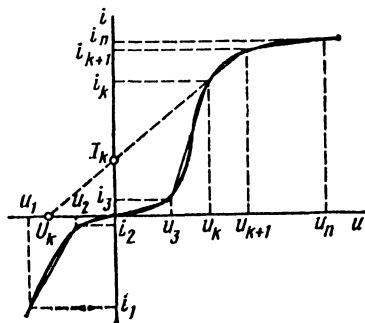


Рис. 1.23

точек излома, определяющих границы между смежными интервалами. Исходная  $(u_1, i_1)$  и конечная  $(u_n, i_n)$  точки, задаваемые на начальном и конечном участках, не являются точками излома.

Найденное приближение может быть записано в виде таблицы, содержащей координаты точек излома, которые располагаются в определенном порядке при непрерывном перемещении по кривой, например, слева направо. Для приближения, показанного на рис. 1.23, имеет следующие координаты точек излома, включая начальные и конечные точки:  $(u_1, i_1), (u_2, i_2), \dots, (u_n, i_n)$ .

Уравнение отрезка прямой  $k$ -го линейного участка между двумя соседними точками излома  $(u_k, i_k)$  и  $(u_{k+1}, i_{k+1})$  можно записать в виде

$$\frac{i - i_k}{i_{k+1} - i_k} = \frac{u - u_k}{u_{k+1} - u_k}. \quad (1.16)$$

После несложных преобразований имеем

$$i = \frac{i_{k+1} - i_k}{u_{k+1} - u_k} u + \frac{i_k u_{k+1} - u_k i_{k+1}}{u_{k+1} - u_k} = k u + I_k. \quad (1.17)$$

Здесь коэффициент  $k$  при напряжении является угловым коэффициентом прямой, а слагаемое  $I_k$  — ординатой точки пересечения прямой с осью  $i$ .

Решение (1.17) относительно напряжения дает соотношение

$$u = \frac{1}{k} i - \frac{1}{k} I_k = k' i + U_k, \quad (1.18)$$

где  $k' = 1/k$  — угловой коэффициент прямой; слагаемое  $U_k$  — абсцисса точки пересечения прямой с осью  $u$ .

Преимуществом кусочно-линейного приближения является то, что на каждом интервале нелинейный элемент можно рассматривать как линейный. Для анализа такой линеаризованной цепи можно применять весь аппарат теории линейных цепей. Поэтому кусочно-линейное приближение широко используется при анализе нелинейных цепей. Преимущество кусочно-линейного представления характеристик состоит также в том, что на его основе можно составить относительно простые приближенные схемы замещения различных элементов с нелинейными характеристиками.

## § 1.7. Получение схем с заданными вольт-амперными характеристиками

Как было показано, число различных нелинейных резистивных элементов велико и вид их характеристик многообразен. Но для решения некоторых практических задач желательно получить любые заданные характеристики с помощью комбинации, т. е. соединения существующих элементов. Здесь речь идет о конструировании из составных элементов или блоков сложной цепи с характеристикой, близкой к заданной характеристике, которую желательно иметь. Подобная задача может быть названа задачей синтеза нелинейного резистивного двухполюсника. Достаточно общее решение указанной задачи можно получить, если использовать кусочно-линейную аппроксимацию заданной характеристики. Каждый линейный участок кусочной характеристики может быть реализован двухполюсным блоком, составленным из простейших элементов и имеющим кусочно-линейную характеристику

Элементарный блок, реализующий любой кусочно-линейный участок характеристики, должен иметь простейшую кусочно-линейную характеристику с двумя линейными участками и регулируемыми параметрами — места расположения точки излома и угла между линейными отрезками

Требования к элементам, входящим в блок:

- 1) характеристики элементов должны быть близкими к идеализированным (с прямолинейными участками), чтобы их комбинация могла дать простейшую кусочно-линейную характеристику,
- 2) элементы должны быть простыми и серийно выпускаться промышленностью;
- 3) параметры характеристик должны легко регулироваться

Указанным требованиям удовлетворяют три элемента: полупроводниковый диод, характеристика которого близка к характеристике идеального диода, линейный резистивный элемент и источник постоянного напряжения или тока. Параметры последних двух элементов можно легко регулировать в широких пределах. Рассмотрим характеристики элементарных блоков, состоящих из последовательного и параллельного соединений перечисленных трех элементов

**Последовательное соединение** (рис 1.24, а). На рис. 1.24, б показаны в совмещенных координатах характеристики идеального диода (1), линейного резистора (2) и источника напряжения (3). Так как при последовательном соединении через все

элементы протекает один и тот же ток и напряжения элементов складываются, для получения вольт-амперной характеристики всей цепи следует просуммировать абсциссы графиков 1, 2 и 3. Ломаная линия 1—2 (рис. 1.24, г) получена суммированием абсцисс графиков 1 и 2 — характеристик идеального диода и линейного резистора. Отрицательная ветвь  $R$  элемента срезается полностью диодом, который не пропускает обратного тока. Добавив к графику 1—2 постоянное напряжение  $U$  источника, получим искомую характеристику, которая состоит из горизонтального участка, направленного по оси  $u$ , и наклонного участка, направленного под углом, тангенс которого равен  $1/R$ . Точка излома определяется напряжением источника и может перемещаться по оси  $u$  регулированием напряжения  $U$  с помощью потенциометра, подключенного к источнику, а также изменением полярности источника.

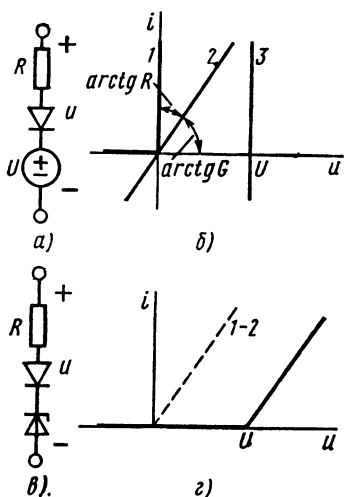


Рис. 1.24

Полученная характеристика является *вогнутой* — ее производная растет с повышением  $u$ . Вид характеристики обуславливается тем, что прямое напряжение на диоде равно разности  $u - U$ . При  $u < U$  напряжение на диоде отрицательно и ток диода и схемы равен нулю. При  $u \geq U$  диод открывается и в схему включается резистор. Источник постоянного напряжения в рассматриваемом блоке (если его применение нежелательно) может быть заменен пассивным элементом в виде лавинного диода или стабилитрона, характеристика которого имеет вертикальный участок (см. рис. 1.9) — положительный, когда стабилитрон включен в обратном направлении. Схема блока со стабилитроном приведена на рис. 1.24, в.

**Параллельное соединение** (рис. 1.25, а). На рис. 1.25, а показана схема, дуальная предыдущей и состоящая из параллельно соединенных идеального диода, линейного резистора и источника тока. Как указывалось, элементом, дуальным идеальному диоду, является также идеальный диод, но со встречно включенными выводами. Характеристика такого диода, полученная поворотом обычной характеристики на  $180^\circ$

показана на рис. 1.25, б (график 1). Там же приведены характеристики линейного резистора 2 и источника тока 3.

При параллельном соединении напряжения на всех элементах одинаковы, а общий ток равен сумме токов всех элементов. Просуммировав ординаты трех графиков, получим график искомой характеристики блока в виде ломаной линии (рис. 1.25, в), состоящей из вертикального участка, совпадающего с осью  $i$  и наклонного участка, направленного под углом, тангенс которого равен  $G$ . Точка излома определяется током источника. Точку излома характеристики можно регулировать

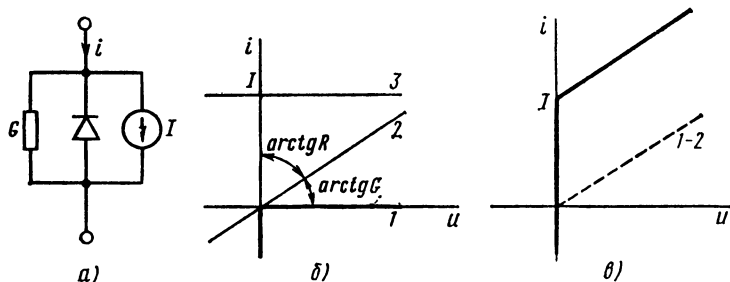


Рис. 1.25

делителем тока, подключенным к источнику, и переключением его выводов, а регулировку угла наклонного участка — изменением сопротивления резистора. Полученную характеристику, производная которой уменьшается с ростом  $u$ , называют *выпуклой*. Вид характеристики обуславливается тем, что прямой ток диода равен разности  $I - i$  тока источника и внешнего тока. При  $i < I$  диод пропускает ток, напряжение на нем и на схеме равно нулю. При  $i > I$  диод размыкается и в схему включается резистор. Источник постоянного тока при необходимости может быть заменен пассивным нелинейным элементом, имеющим характеристику с горизонтальным участком.

Если переключить выводы блока или изменить на обратные выводы диода и источника, то характеристика получится поворотом исходной характеристики на  $180^\circ$  вокруг начала координат. Для последовательного и параллельного блоков с переключенными выводами, как легко убедиться, получим характеристики соответственно выпуклую и вогнутую.

Перейдем теперь к *построению* искомой цепи с заданной характеристикой из рассмотренных однотипных блоков, соединенных между собой соответствующим образом.

Прежде всего *заданная* характеристика, как говорилось, подвергается *кусочно-линейной* аппроксимации. Далее кусоч-

но-линейное приближение необходимо *разложить на сумму* элементарных характеристик, состоящих из *двух линейных* участков, которые могут быть реализованы блоками. Соединяя блоки последовательно или параллельно в зависимости от примененного разложения, получим искомую цепь.

Проиллюстрируем разложение характеристик на примерах.

На рис. 1.26, *а* показана вогнутая кусочно-линейная характеристика с тремя участками, угловые коэффициенты которых равны соответственно 0,5; 1; 2, а абсциссы точек излома 0; 2; 4В. Разложение произведем, продолжив отрезки первого и второго участков и отнимая кусочно-линейной характеристики. В результате получим три составляющие элементарные характеристики *a*, *b* и *c*, точки излома которых лежат на оси *u* и совпадают с абсциссами точек излома исходной характеристики, а угловые коэффициенты равны соответственно 0,5; 0,5; 1. Угловые коэффициенты численно равны проводимостям резистивных элементов последовательных блоков, а точки излома — напряжениям источников.

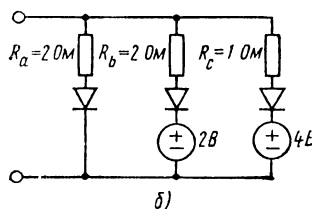
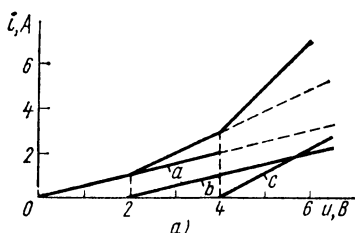


Рис. 1.26

мированием ординат характеристик трех блоков, последние должны быть соединены параллельно (рис. 1.26, *б*). При нарастании напряжения на входе ( $u > 0$ ) сначала включается только первый блок, при  $u \geq 2$  В параллельно ему включается второй блок, а при  $u \geq 4$  В — дополнительно третий блок.

На рис. 1.27, *а* представлена выпуклая кусочно-линейная характеристика с тремя участками, угловые коэффициенты которых по отношению к оси ординат равны 0,5; 1; 2, а ординаты точек излома — 0; 4; 6 А. Разложение на элементарные участки, произведенные аналогично предыдущему, дают три элементарные характеристики *a*, *b* и *c*, точки излома которых лежат на оси ординат, а угловые коэффициенты наклонных участков равны 0,5; 0,5; 1. Последние численно равны сопротивлениям резистивных элементов параллельных блоков, а точки излома — токам источников. Блоки соединяются последовательно (рис. 1.27, *б*). При  $0 \leq i \leq 4$  А включается толь-

ко первый блок, при  $4 \leq i \leq 6$  А последовательно с ним включается второй блок, а при  $i > 6$  А — дополнительно третий блок.

Рассмотрим общий случай, когда кусочно-линейная характеристика содержит как вогнутые, так и выпуклые участки.

На рис. 1.28, а изображена кусочно-линейная характеристика с четырьмя участками: первые два образуют вогнутую часть, а последние два — выпуклую. Разложение этой характе-

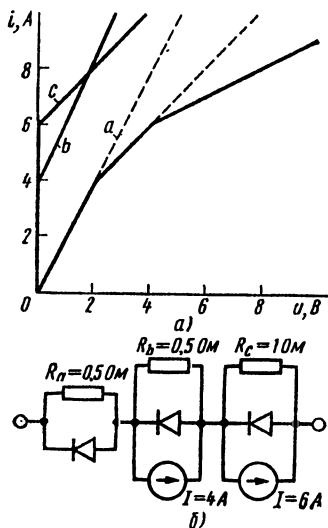


Рис. 1.27

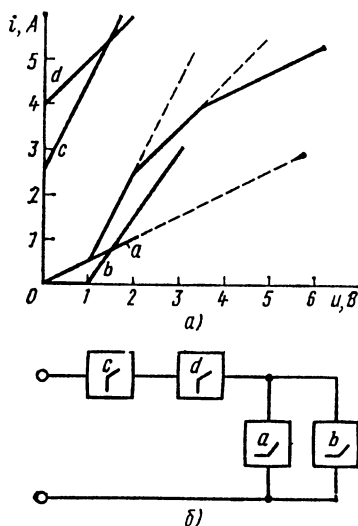


Рис. 1.28

ристики дает элементарные характеристики  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ . Первые две характеристики реализуются параллельным соединением блоков из последовательных элементов, а вторые две — последовательным соединением блоков из параллельных элементов (рис. 1.28, б). Оба двухполюсника необходимо соединить последовательно.

В заключение приведем простейшие схемы из диодных блоков, реализующие некоторые типичные нелинейные характеристики, имеющие кусочно-линейный вид. На основании изложенного метода разложения кусочно-линейных характеристик, а также их суммирования не представляет трудностей получить схемы по заданным характеристикам или характеристики по известным схемам. На рис. 1.29, а, б показаны две взаимодуальные характеристики с отсечками напряжений и токов, называемые характеристиками релейного типа. В схеме а при



$i > 0$  напряжение  $u = U_1$  постоянно, а при  $i < 0$  напряжение  $u = -U_2$  также постоянно. В схеме б при  $u > 0$  ток  $i = I_1$  постоянен, а при  $u < 0$  ток  $i = -I_2$  также остается неизменным. Включая дополнительно резистивный элемент параллельно (схема а) или последовательно (схема б), можно получить конечные наклоны характеристик на средних участках, показанные пунктирными линиями. Если добавить резистивные элементы в ветви блоков, то конечные наклоны получат крайние участки характеристик.

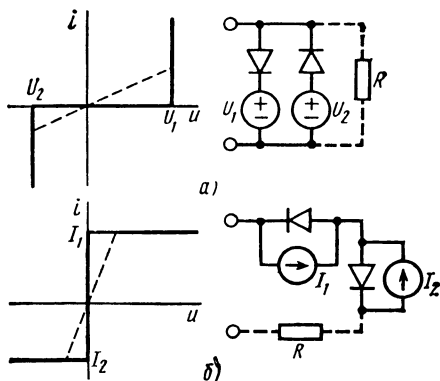


Рис. 1.29

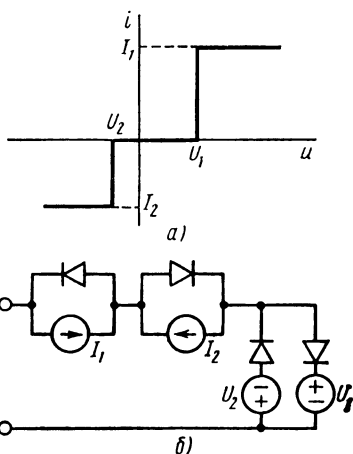


Рис. 1.30

На рис. 1.30, а и б показаны более сложная характеристика релейного типа и реализующая ее схема. Добавляя в различные ветви схемы резистивные элементы, можно также получить конечные наклоны отдельных участков характеристики.

Характеристики, подобные характеристикам рассмотренных диодных схем, но без нежелательных источников постоянного напряжения и тока, можно получить, используя только полупроводниковые лавинные диоды или стабилитроны. На рис. 1.31, а приведена схема из двух встречно включенных полупроводниковых стабилитронов, а на рис. 1.31, б показаны идеализированные характеристики: прямо включенного (1), обратно включенного (2) диодов. Суммирование напряжений стабилитронов, т. е. абсцисс графиков 1 и 2, дает результирующую характеристику, показанную на рис. 1.31, в. Эта схема используется, в частности, для стабилизации напряжения устройства, на выходе которого можно получить напряжение обеих полярностей.

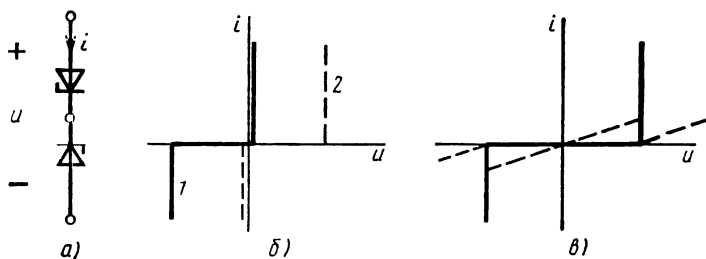


Рис. 1.31

Если к рассматриваемой схеме из двух последовательных диодов присоединить параллельно линейный резистивный элемент, то получим конечный наклон характеристики на участке  $|u| < E$ , а при последовательном соединении получим линейные участки при  $|u| > E$  (пунктирные линии).

### § 1.8. Кусочно-линейные схемы замещения нелинейных элементов

Перейдем к составлению приближенных схем замещения некоторых видов нелинейных элементов с применением введенных идеальных элементов, а также линейных резистивных элементов.

Схемы замещения обычно составляют на основе *кусочно-линейного представления нелинейных характеристик* элемента, что неизбежно приводит к тому, что характеристика модели или схемы замещения отличается от исходной. Усложняя схему путем увеличения числа интервалов линейного приближения, можно повысить точность, но это существенно затруднит расчет. Как всегда, *при составлении схем замещения необходим компромиссный выбор между точностью и усложнением расчетов*.

Здесь приведем простейшие кусочно-линейные схемы замещения некоторых нелинейных резистивных элементов для низких частот, на которых можно пренебречь неизбежными паразитными емкостями и индуктивностями и получить чисто резистивную модель.

**Реальный диод.** В § 1.2 были приведены характеристики различных видов реальных диодов. Качественно общим для них является то, что в отличие от идеального диода напряжение в прямом направлении не равно нулю и ток в обратном направлении также отличен от нуля. Количественно параметры прямой и обратной ветвей характеристик различных диодов существенно отличаются. Например, у кенотрона обратный

ток практически равен нулю, но падение напряжения в прямом направлении довольно велико; у полупроводникового диода обратный ток относительно велик, особенно при повышенной температуре, но падение напряжения в прямом направлении мало.

В первом приближении в области нормальных значений напряжений и токов рабочего режима прибора характеристику диода можно представить двумя линейными участками с точкой излома в начале координат, как показано на рис. 1.32, а. Указанной кусочно-линейной характери-

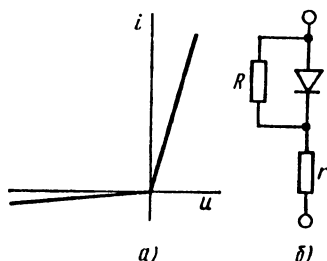


Рис. 1.32

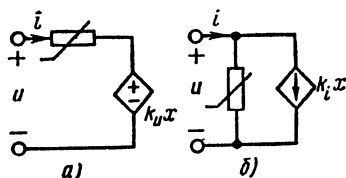


Рис. 1.33

стике соответствует схема замещения (рис. 1.32, б), состоящая из идеального диода, последовательного сопротивления  $r$ , учитывающего падение напряжения на диоде в прямом направлении, и параллельного сопротивления  $R \gg r$ , учитывающего обратный ток диода.

Управляемый двухполюсный элемент. Для получения схем замещения управляемых элементов необходимо использовать *зависимые источники*, управляемые соответствующими сигналами, которыми определяются характеристики.

Рассмотрим управляемый двухполюсный элемент, характеристики которого под действием управляющего параметра сдвигаются в направлении оси напряжений. К такому типу элемента относится, в частности, термистор (см. рис. 1.14). Указанный элемент можно представить схемой замещения, изображенной на рис. 1.33, а. Схема состоит из последовательного соединения нелинейного резистивного элемента, характеристика которого соответствует характеристике элемента при нулевом значении управляющего параметра, и зависимого источника напряжения, напряжение которого, пропорциональное управляющему параметру  $x$ , складывается с абсциссами нелинейной характеристики резистора. Для нелинейного резистора может быть составлена приближенная кусочно-линейная схема замещения (см. § 1.7).

Результирующая характеристика схемы при заданной величине  $x$  и, следовательно, напряжения источника будет получаться смещением характеристики резистивного двухполюсника вправо (при  $x > 0$ ) или влево (при  $x < 0$ ) по оси напряжения.

В случае управляемого двухполюсного элемента типа фото диода, характеристики которого под действием управляющего параметра сдвигаются в направлении, параллельном оси тока (см. рис. 1.13), получим дуальную схему замещения (рис. 1.33, б). Схема состоит из параллельного соединения нелинейного резистивного элемента с характеристикой, соответствующей  $x = 0$ , и источника тока, ток которого пропорционален величине управляющего параметра. Токи обоих элементов складываются, поэтому при изменении управляющего параметра характеристика резистивного элемента будет смещаться вдоль оси тока.

**Триод.** Относительно простую кусочно-линейную схему замещения триода в режиме больших сигналов можно получить, если пренебречь влиянием анодного напряжения на сеточный ток и далее принять, что сеточный ток не достигает области большого насыщения. В этом случае входную (сеточную) характеристику можно представить в виде кусочно-линейной кривой (рис. 1.34, а) из двух участков: горизонтального, совпадающего с осью  $u_1$  (при  $u_1 < 0$ ), и линейно нарастающего под углом, тангенс которого равен  $1/r_g$  (при  $u_1 > 0$ ). Подобной характеристике соответствует схема входного контура, состоящая из последовательно соединенных идеального диода и сопротивления  $r_g$  (рис. 1.34, в).

Анодные (выходные) характеристики при различных сеточных напряжениях можно представить в виде семейства кусочно-линейных кривых, смещенных относительно друг друга в зависимости от значения сеточного напряжения (рис. 1.34, б). Каждая кривая состоит также из горизонтального участка, совпадающего с осью  $u_2 = u_a$ , и линейно нарастающего участка с угловым коэффициентом, равным  $1/r_a$ , где  $r_a = \Delta u_a / \Delta i_a$  — анодное (выходное) сопротивление, представляющее собой отношение приращений анодного напряжения и анодного тока при неизменном сеточном напряжении.

Первому отрезку семейства выходных кусочно-линейных характеристик при  $u_1 = u_g = 0$ , очевидно, соответствует та же схема из последовательного соединения идеального диода и резистора (рис. 1.34, в). Смещение характеристик при изменении сеточного напряжения можно получить с помощью последовательно включенного источника напряжения, напряжение которого управляется входным (сеточным) напряжением.

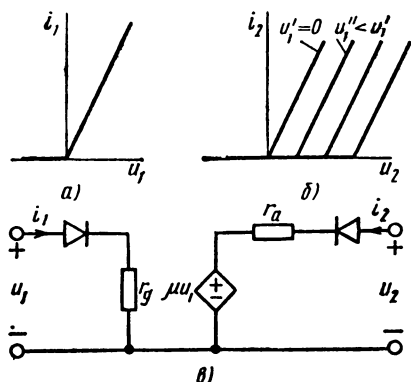


Рис. 1.34

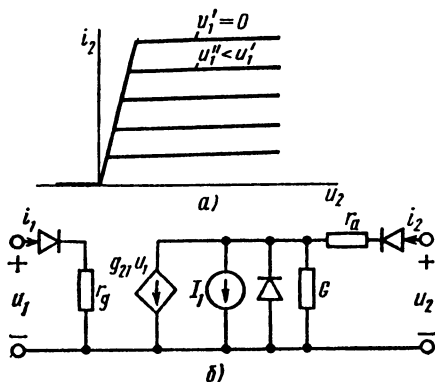


Рис. 1.35

Пентод. Обычно в пентоде используется одна управляющая сетка, так что пентод можно рассматривать как трехполюсный резистивный элемент. Ток управляющей сетки пентода не отличается от сеточного тока триода (см. рис. 1.34, а), поэтому схема входного контура будет такой же, как у триода.

Анодные характеристики пентода и триода неодинаковы. На рис. 1.35, а показано приближенное кусочно-линейное представление семейства анодных характеристик пентода при различных напряжениях на управляющей сетке. Здесь имеются три линейных участка: участок, совпадающий с осью абсцисс ( $u_2 < 0$ ), линейно нарастающий средний участок с одинаковым наклоном для всего семейства и почти горизонтальные смещенные в направлении оси тока отрезки прямых. Изменение величины тока смещенных отрезков получается пропорциональным напряжению на сетке.

Поэтому схема замещения должна иметь управляемый источник тока, ток которого пропорционален напряжению на сетке:  $i_2 = Su_1$ , где  $g_{21} = S$  — крутизна характеристики.

Самую верхнюю кусочно-линейную характеристику семейства, соответствующую  $u_1 = u_g = 0$ , можно получить с помощью последовательного соединения двух блоков (рис. 1.35, б): блока из последовательно соединенных идеального диода и сопротивления  $r_a$ , которое определяется наклоном нарастающего среднего участка, и блока из параллельно соединенных источника тока  $I_1$ , идеального диода и проводимости  $G$ , определяемой наклоном отрезков третьего участка. Смеще-

ние отрезков третьего участка при  $u_1 = u_g < 0$  можно получить, если параллельно второму блоку включить источник тока, управляемый входным (сеточным) напряжением.

**Транзистор.** Рассмотрим схему замещения биполярного транзистора типа  $p-n-p$ , включенного по схеме с общим эмиттером. Такая схема включения наиболее часто применяется на практике в различных переключающих устройствах, работающих в режиме больших сигналов.

Для выходных (коллекторных) характеристик примем кусочно-линейные представления, показанные на рис. 1.36, а;

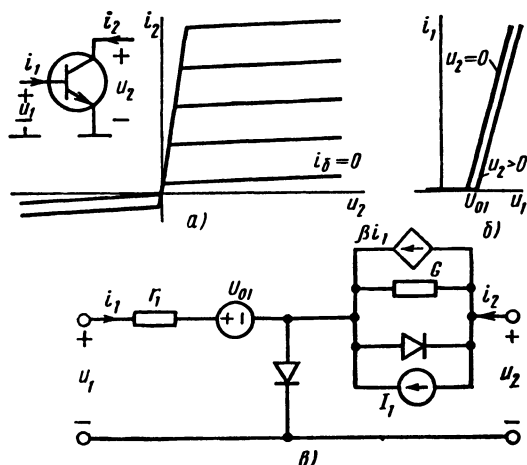


Рис. 1.36

наклоны линейных отрезков приближенно приняты одинаковыми; расстояния между отрезками пропорциональны входному (базовому) току. При этом отношение коллекторного тока к току базы равно коэффициенту  $\beta$ :  $\beta = i_k/i_b = i_2/i_1$ . Нижний отрезок прямой семейства характеристик, соответствующий нулевому значению входного тока ( $i_1 = i_b = 0$ ), можно получить с помощью элементарного блока с выпуклой характеристикой, состоящего из параллельно соединенных источника тока  $I_1$ , идеального диода и сопротивления, величина которого  $1/G$  зависит от наклона прямых. Все остальные отрезки прямых семейства выходных характеристик можно получить с помощью зависимого источника тока, значение тока которого, равное  $\beta i_1$ , управляется входным током. Управляемый источник тока присоединяется параллельно блоку (рис. 1.36, в).

Если необходимо учесть обратный ток коллектора, то последовательно с приведенной схемой необходимо включить ана-

логичный блок встречной полярности, состоящий из источника тока и идеального диода, соединенных параллельно.

Для входных характеристик можно также приближенно принять кусочно-линейное представление (рис. 1.36, б). Характеристику, соответствующую нулевому значению напряжения на выходе ( $u_2 = 0$ ), можно получить с помощью элементарного блока из последовательно соединенных источника напряжения, идеального диода и сопротивления. Остальные характеристики семейства ( $u_2 > 0$ ) могут быть получены последовательным присоединением зависимого источника напряжения, управляемого выходным напряжением.

### § 1.9. Преобразование нелинейных характеристик

Каждый существующий реальный нелинейный прибор или устройство, как видно из краткого обзора (см. § 1.2; 1.3), обладает вполне определенными, только ему присущими формами характеристик. На практике, как указывалось, часто желательно иметь элемент с определенной формой характеристик. Диодные схемы получения характеристик, рассмотренные в § 1.7, не всегда оказываются приемлемыми из-за недостаточной точности и невозможности получения падающих участков. Поэтому представляет интерес принципиальная *возможность преобразования формы заданной характеристики конкретного элемента*, чтобы изменить ее в желательном направлении.

Линейные активные элементы, такие, как зависимые источники, операционные усилители и транзисторы, позволяют в принципе выполнить преобразование характеристик принятого за основу нелинейного элемента. Преобразование можно осуществить различным образом. Задача состоит в нахождении цепей, производящих или реализующих простые преобразования

Цепь, осуществляющая требуемое преобразование, представляет резистивный активный линейный четырехполюсник, который можно описать, например, уравнениями через параметры передачи:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}u_2 + a_{12}(-i_2); \\ i_1 &= a_{21}u_2 + a_{22}(-i_2), \end{aligned} \quad (1.19)$$

где  $u_1, i_1; u_2, i_2$  — напряжения и токи на входе и выходе;  $a_{11} = u_1/u_2$ ,  $a_{21} = i_1/u_2$  при  $i_2 = 0$  (разрыве выхода),  $a_{12} = u_1/i_2$ ,  $a_{22} = i_1/i_2$  при  $u_2 = 0$  (коротком замыкании выхода) — параметры передачи.

Исходный нелинейный двухполюсник с известной характеристикой подключается в виде нагрузки к выходу преобразую-

щего активного четырехполюсника, который должен изменить ток и напряжение выхода таким образом, чтобы соотношение между током и напряжением на его входе давало нужную форму характеристики.

Рассмотрим кратко четыре вида преобразующих четырехполюсников: скалор, ротатор, рефлектор, мутатор и производимые ими четыре различных вида преобразования характеристик.

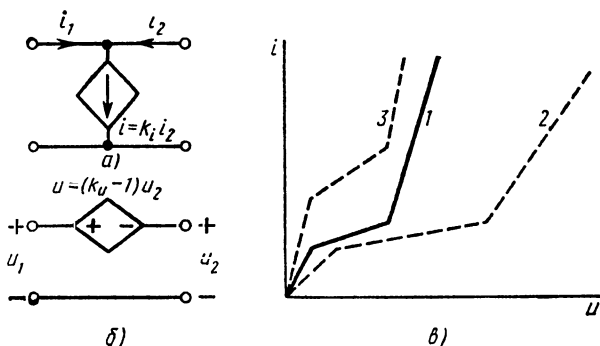


Рис. 1.37

**Скалор.** Скалор производит изменение масштаба напряжений или токов — *растяжение* или *сжатие характеристик* по оси абсцисс или по оси ординат, т. е. умножение напряжения или тока исходного элемента на некоторый масштабный коэффициент.

Скалор токового типа, изменяющий ток исходного элемента (на выходе) и оставляющий без изменения его напряжение, будет описываться уравнениями:  $u_1 = u_2$ ;  $i_1 = -i_2/k$ .

Соответствующая матрица параметров передачи

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/k \end{bmatrix}. \quad (1.20)$$

Легко убедиться, что реализующая схема скалора представляется схемой рис. 1.37, а с параллельно включенным зависимым источником тока управляемым током  $i_2$  (идеальным усилителем тока). На рис. 1.37, б показано выполняемое цепью преобразование заданной характеристики (кривая 3).

Скалор, изменяющий только напряжение, будет описываться уравнениями:  $u_1 = u_2/k$ ;  $i_1 = -i_2$  и матрицей параметров



передачи

$$a = \begin{bmatrix} 1/k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.21)$$

Реализующая схема из последовательно включенного зависимого источника напряжения, управляемого напряжением выхода (идеального усилителя напряжения), приведена на рис. 1.37, б; на рис. 1.37, в изображено выполняемое цепью преобразование (кривая 2).

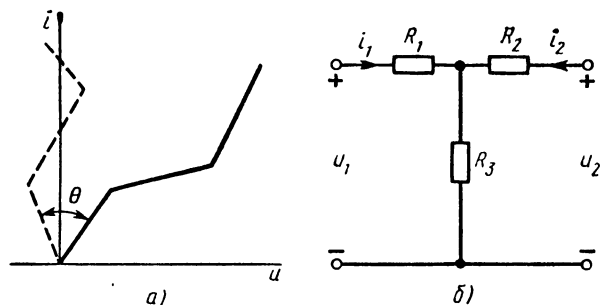


Рис. 1.38

**Ротатор.** Активный четырехполюсник, называемый ротатором, позволяет производить *поворот характеристики*  $i_2 = i_2(u_2)$  против часовой стрелки на заданный угол  $\theta$  (рис. 1.38, а). Нетрудно убедиться непосредственной подстановкой, что указанный поворот будет осуществляться, если напряжение и ток на входе выражаются так:

$$\begin{aligned} u_1 &= (\cos \theta) u_2 + R (\sin \theta) i_2; \\ i_1 &= \frac{1}{R} (\sin \theta) u_2 - (\cos \theta) i_2, \end{aligned} \quad (1.22)$$

где  $R$  — масштабный множитель, определяющий величину тока, а также размерность. В частном случае  $\theta = 45^\circ$  и  $\theta = 90^\circ$  имеем

$$\begin{aligned} u_1 &= (u_2 + Ri_2) \sqrt{2}/2; & u_1 &= Ri_2; \\ i_1 &= \left( \frac{u_2}{R} - i_2 \right) \sqrt{2}/2; & u_1 &= \frac{1}{R} u_2. \end{aligned}$$

Точка  $u_2 = 1, i_2 = 0$  переходит в точку:  $u_1 = \sqrt{2}/2; i_1 = \sqrt{2}/2$  с углом  $45^\circ$  и точку:  $u_1 = 0; i_1 = 1/R$  с углом  $90^\circ$  Ре-

ализовать уравнения ротатора можно, например, Т-образной резистивной цепью (рис. 1.38, б), параметры передачи которой

$$a = \begin{bmatrix} 1 + R_1 G_3 & R_1 + R_2 + R_1 R_2 G_3 \\ G_3 & 1 + R_2 G_3 \end{bmatrix}. \quad (1.23)$$

Приравняв (1.22) и (1.23), имеем

$$G_3 = \sin \theta / R; \quad R_1 = R (\cos \theta - 1) / \sin \theta.$$

Одно из сопротивлений получается отрицательным, которое может быть реализовано с помощью активной цепи.

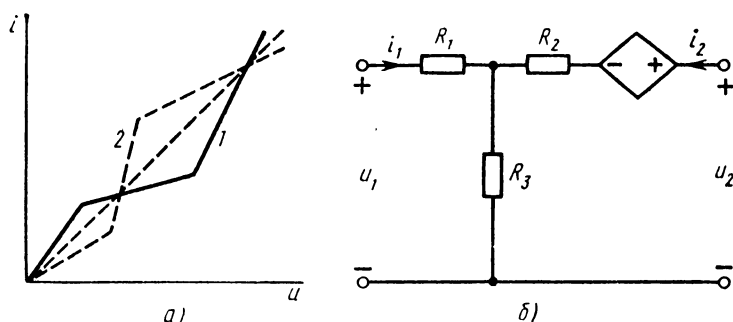


Рис. 1.39

**Рефлектор.** Рефлектор производит *отображение характеристики* относительно прямой, проходящей через начало координат под углом  $\psi$  к оси  $u_2$ , для чего уравнения через параметры передачи должны иметь вид

$$u_1 = (\cos 2\psi) u_2 - R (\sin 2\psi) i_2; \quad (1.24)$$

$$i_1 = \frac{1}{R} (\sin 2\psi) u_2 + (\cos 2\psi) i_2.$$

На рис. 1.39, а показано преобразование характеристики в частном случае отображения от линии с углом  $\psi = 45^\circ$ , когда

$$u_1 = -R i_2;$$

$$i_1 = \frac{1}{R} u_2.$$

Входное сопротивление четырехполюсника в случае линейной нагрузки

$$R_{вх} = R^2 (-i_2/u_2) = R_2 G_n$$

получается пропорциональным проводимости нагрузки — имеем гиратор. При  $\psi = 90$  и  $180^\circ$  получаются преобразователи отрицательного сопротивления — входное сопротивление пропорционально сопротивлению нагрузки со знаком минус.

Непосредственной подстановкой можно также убедиться в справедливости отображения. Одна из реализующих схем преобразующего четырехполюсника показана на рис. 1.39, б.

**Мутатор.** Мутатором называют линейный активный четырехполюсник, который производит *преобразование характеристики нелинейного элемента одной природы в характеристику нелинейного элемента другой природы*.

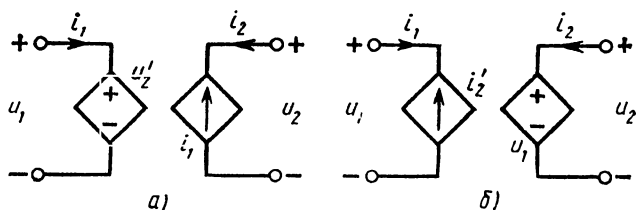


Рис. 1.40

*ку нелинейного элемента другой природы.* Наибольший интерес представляет преобразование характеристики резистивного элемента в характеристики реактивного элемента:  $\bar{R}$  —  $L$ - и  $\bar{R}$  —  $C$ -мутаторы, которые позволяют характеристики резистивного двухполюсника  $i_2(u_2)$  преобразовать в вебер-вольтовую характеристику индуктивного элемента и кулон-вольтовую характеристику емкостного элемента.

Реализующие схемы мутаторов строятся на зависимых источниках. На схеме рис. 1.40, а изображена одна из схем  $\bar{R}$  —  $L$ -мутатора; на входе схемы имеем:  $u_1 = du_2/dt$ ;  $i_1 = -i_2$ .

На схеме рис. 1.40, б представлена одна из возможных схем  $\bar{R}$  —  $C$ -мутатора, на входе которого имеем:  $u_1 = u_2$ ;  $i_1 = -\frac{di_2}{dt}$ .

В заключение необходимо отметить, что при практическом применении рассмотренных преобразователей возникают трудности, связанные с тем, что цепи с этими элементами могут оказаться неустойчивыми, так что требуется принятие мер по обеспечению устойчивости, что, к сожалению, не всегда выполнимо.

## ГЛАВА 2

### МЕТОДЫ АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

#### § 2.1. Задача анализа нелинейных резистивных цепей

В общем виде задачу анализа нелинейных резистивных цепей можно сформулировать таким образом: заданы схема цепи с характеристиками резистивных элементов, а также напряжения и токи источников; требуется найти напряжения и токи ветвей или элементов цепи. Решение поставленной задачи сводится к составлению и решению уравнений заданной цепи.

Точное аналитическое решение задачи анализа возможно только в очень редких случаях простейших резистивных цепей с определенными характеристиками элементов. В силу ограниченности области применения аналитический метод не будем рассматривать. В данной главе рассматриваются следующие достаточно общие методы анализа нелинейных резистивных цепей: 1) метод составления уравнений цепи и их численного решения, 2) метод преобразования цепи с применением графических построений, 3) метод анализа последовательных кусочно-линейных схем замещения

Области применения каждого из перечисленных методов определяются прежде всего постановкой конкретной задачи анализа и целью расчетов, а также конфигурацией цепи

До подробного рассмотрения указанных общих методов необходимо уточнить постановку задачи анализа нелинейных резистивных цепей, исходя из возможности получения решения. Следует иметь в виду, что *процессы в нелинейных резистивных цепях*, которые не содержат запаасающие энергию индуктивные и емкостные элементы, *будут описываться не системами дифференциальных, а системами функциональных нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений*. Систему нелинейных функциональных уравнений можно записать в общем виде

$$\left. \begin{aligned} f_1(i_1, i_2, \dots, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, t) &= 0; \\ f_2(i_1, i_2, \dots, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, t) &= 0; \\ &\vdots \\ f_n(i_1, i_2, \dots, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Здесь  $i_n, u^{(l)}$  — искомые токи и напряжения ветвей цепи

Будем предполагать параметры резистивных элементов цепи независимыми от времени, так что время  $t$  входит в уравне-

ние только при наличии источников переменных напряжений и токов.

В нелинейных резистивных цепях из сосредоточенных элементов, напряжения и токи которых связаны функциональными уравнениями, переходного процесса и связанного с ним запаздывания сигналов не будет. Если на входе цепи включается источник периодического напряжения или тока, например, в виде синусоидальных колебаний, то во всех ветвях сразу установятся также периодические напряжения и токи, но другой «искаженной» формы и с другими амплитудами. Следовательно, при действии в цепи источников переменных сигналов напряжения и токи всех ветвей анализируемой цепи будут также функциями времени.

Нахождение токов и напряжений в виде функций времени в результате решения системы уравнений (2.1), содержащих время, представляет весьма трудную задачу. Поэтому *единственный практически приемлемый путь состоит в решении уравнений для ряда фиксированных моментов времени  $t = t_i$* . Для каждого фиксированного момента времени напряжения и токи будут также фиксированными, что равносильно замене источников переменных сигналов источниками постоянных сигналов, напряжения и токи которых равны ординатам переменных напряжений и токов соответствующих источников при  $t = t_i$ .

Таким образом, для *фиксированного момента  $t = t_i$  будем иметь резистивную цепь постоянного тока и время не войдет в систему уравнений (2.1)*:

$$\begin{aligned} f_k(i_1, i_2, \dots, i_\mu; u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(v)}) &= 0 \\ (k &= 1, 2, \dots, \mu; \mu + v = n). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Решения или корни этой системы для всех переменных суть постоянные величины, не зависящие от времени — при действии в резистивной цепи источников постоянного сигнала напряжения и токи ветвей также постоянны.

В общем случае из решения системы функциональных уравнений (2.2) необходимо определить токи и напряжения при любых значениях напряжений и токов действующих в цепи источников.

Особенность систем функциональных уравнений состоит в том, что в отличие от систем линейных уравнений они *могут иметь не единственное решение*. Несколько решений обычно имеет цепь, содержащая элементы с немонотонными характеристиками.

При некоторой идеализации характеристик элементов уравнения цепи *могут вовсе не иметь решения*. Если, например, вольт-амперная характеристика элемента имеет участок

насыщения, который для простоты аппроксимирован отрезком горизонтальной прямой, то при подключении элемента к источнику тока, амплитуда тока которого лежит выше указанного горизонтального отрезка, характеристики источника и элемента не пересекутся. Отсутствие решения (пересечения характеристик) обычно является следствием чрезмерной идеализации характеристик. В действительности, если учесть малый, но конечный наклон характеристики, решение будет существовать, что всегда имеет место в реальных устройствах.

Решение системы (2.2) функциональных уравнений для большого числа значений напряжений и токов источников, соответствующих каждому дискретному моменту времени, возможно только с помощью численных методов и цифровых вычислительных машин (ЦВМ). Существует ряд алгоритмов числового решения нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений.

Для анализа нелинейной цепи численными методами необходимо сначала составить систему уравнений, которыми описывается цепь, что также может потребовать использования ЦВМ. Таким образом, решение задачи анализа нелинейной резистивной цепи со многими элементами и источниками переменного сигнала при необходимости определения реакций для большого числа моментов времени  $t_i$  выполнимо лишь численными методами с привлечением ЦВМ. К счастью, указанный общий случай анализа на практике встречается редко.

В подавляющем большинстве практических задач анализа нелинейных резистивных цепей конфигурация цепи не бывает произвольно сложной; в цепи, как правило, действует один источник переменного сигнала, и требуется определить реакцию в одной или двух ветвях. Поэтому типичной является следующая задача анализа нелинейных резистивных цепей.

*Задана цепь, содержащая резистивные элементы с известными характеристиками, источники постоянного напряжения и тока и один источник переменного сигнала  $f_1(t)$ , действующий на входе цепи. Форма напряжения или тока источника переменного сигнала может быть произвольной. Требуется найти реакцию  $f_2(t)$ : напряжение или ток либо на входе, либо на выходе цепи.*

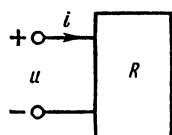
В первом случае, когда интересуются реакцией на входе, т. е. там, где действует источник переменного сигнала, нелинейную цепь с источниками постоянного напряжения и тока можно рассматривать как *нелинейный резистивный двухполюсник*, имеющий одну пару выводов — вход (рис. 2.1, а).

Во втором случае, когда интересуются реакцией на выходе, нелинейную цепь можно рассматривать как *нелинейный рези-*

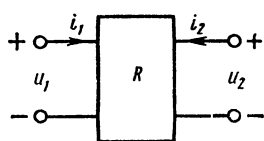
тивный четырехполюсник, имеющий две пары выводов — вход и выход (рис. 2.1, б).

Для нахождения искомой реакции на входе или выходе  $f_2(t)$  в виде функций времени при действии заданного на входе сигнала  $f_1(t)$  необходимо сначала найти входную вольт-амперную характеристику двухполюсника или передаточную характеристику четырехполюсника.

*Входной характеристикой* резистивного двухполюсника называют зависимость мгновенного значения реакции на входе цепи от мгновенного значения действующего сигнала. При



а)



б)

Рис. 2.1

действии источника напряжения входная характеристика представляет зависимость входного тока от напряжения, и при действии источника тока — зависимость входного напряжения от тока.

*Передаточной характеристикой* резистивного четырехполюсника называют зависимость мгновенного значения реакции на выходе цепи от мгновенного значения действующего сигнала. При действии источника напряжения передаточная характеристика представляет зависимость выходного напряжения (тока) от напряжения исто-

точника, а при действии источника тока — зависимость выходного тока (напряжения) от тока источника.

Указанные характеристики в принципе можно снять экспериментально с помощью подведения ко входу цепи регулируемого постоянного напряжения (тока) и измерения тока (напряжения) на входе и выходе. Графики, построенные по данным измерений в зависимости от значения входного напряжения (тока), будут входными и передаточными характеристиками.

В общем случае цепи произвольной конфигурации входные и передаточные характеристики определяются с помощью числовых расчетов на ЦВМ: для каждой амплитуды входного воздействия, соответствующей всем дискретным значениям времени в интересующем интервале, вычисляются реакции на входе и на выходе. По этим данным может быть построен график характеристики или получено приближенное аналитическое выражение.

Для анализа широкого класса нелинейных резистивных цепей очень существенным является возможность определения их входных и передаточных характеристик без составления си-

стем уравнений аналогично методу преобразования линейных схем.

Для наиболее часто применяемых на практике конфигураций цепей (например, лестничной) входные и передаточные характеристики могут быть найдены с помощью *преобразования схем* путем замены последовательно или параллельно соединенных элементов эквивалентным элементом. Указанное обстоятельство значительно упрощает расчет нелинейных резистивных цепей. При этом весьма удобно применение графического метода определения входной и передаточной характеристик, составляющего главную и наиболее трудоемкую часть расчета.

Если входная или передаточная характеристика найдена, то заключительная часть расчета — определение по заданному сигналу искомой реакции  $f_2(t)$  в виде явной функции времени — является нетрудной.

В соответствии с приведенным уточнением постановки задачи анализа нелинейных резистивных цепей в этой главе рассматриваются упомянутые ранее общие методы расчета.

Вначале излагается менее общий, но простой и наглядный метод *преобразований схем*, применяемый главным образом к цепям последовательно-параллельной (лестничной) структуры. Преобразование выполняется суммированием ординат или абсцисс графиков вольт-амперных характеристик параллельно или последовательно соединенных ветвей.

Далее рассматривается *кусочно-линейный метод*, который основан на представлении участков характеристик каждого нелинейного резистивного элемента отрезками прямых, которые затем замещаются схемами из источника тока (напряжения) с параллельно (последовательно) соединенным линейным сопротивлением. Метод можно применять при использовании ЦВМ для анализа цепей любой конфигурации. Существенное упрощение процедур расчетов связано с тем обстоятельством, что для определенного сочетания линейных участков различных элементов цепь оказывается линейной, описываемой системой линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрение третьего общего *численного метода с аппроксимацией характеристик элементов полиномами степени  $n$  или трансцендентными функциями* начинается с составления систем функциональных уравнений цепи. Затем излагаются простейшие алгоритмы числового решения уравнений цепи и приводятся дискретные линеаризованные схемы замещения одного из алгоритмов для каждого шага числового расчета.

В качестве приложения разобранных методов приведен расчет смещения и рабочих точек электронных приборов, имеющий большое значение для практики.



В заключение рассматривается одно из важнейших общих свойств любой нелинейной цепи и состоящее в преобразовании спектра входного сигнала.

Почти ко всем излагаемым далее методам анализа имеет отношение вопрос нахождения по передаточной или входной характеристике и заданному на входе сигналу формы интересующей реакции на входе или выходе. Поэтому начнем изложение с определения вида выходной реакции по заданному входному сигналу.

## § 2.2. Определение реакции по заданному входному сигналу и характеристике цепи

Если входная или передаточная характеристика цепи известна, то завершающим этапом расчета является определение искомой реакции — напряжения (тока) на входе или выходе по любому заданному в виде функции времени входному сигналу. Для определения реакции можно применить графический или аналитический метод.

Рассмотрим *графический метод определения реакции  $f_2(t)$  (тока или напряжения) по заданному входному сигналу  $f_1(t)$  (напряжению или току) и известной входной или передаточной характеристике.*

На рис. 2.2 изображена характеристика цепи — график зависимости выходной реакции  $f_2$  от действующего на входе сигнала  $f_1$ . Здесь же построены графики зависимости от времени заданного сигнала (внизу) и искомой реакции (справа). Ось ординат графика  $f_1(t)$  направлена горизонтально, так же как на характеристике, а ось времени — сверху вниз. Для простоты форма входного сигнала принята синусоидальной. Ось ординат графика  $f_2(t)$  направлена вертикально, так же как на характеристике, а ось времени — слева направо.

Графический метод определения реакции по известной характеристике цепи и заданному входному сигналу состоит в следующем. Чтобы получить точку  $f_{2i}$  кривой реакции, соответствующей выбранной точке  $f_{1i}$  входного сигнала, необходимо сделать построения, показанные пунктирными линиями на рис. 2.2. Построения сводятся к тому, что любые *соответственные точки  $f_{1i}$  и  $f_{2i}$  графиков  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  проектируются одна в другую относительно графика характеристики.* Чтобы получить требуемую точность, следует спроектировать достаточно большое число точек, особенно в тех местах, где характеристика или входной сигнал имеют участки с большой крутизной.

Недостаток построений на рис. 2.2 заключается в том, что действующий сигнал и искомая реакция располагаются в раз-

The figure consists of two side-by-side plots. The left plot has a horizontal axis labeled  $f_1$  and a vertical axis labeled  $f_2$ . A curve starts from the bottom left, crosses the  $f_1$  axis, and goes upwards. Two points are marked on the curve: point 1 is in the lower half-plane ( $f_2 < 0$ ) and point 2 is in the upper half-plane ( $f_2 > 0$ ). A horizontal dashed line connects point 2 to the right plot. A vertical dashed line connects point 1 to the right plot. The right plot has a horizontal axis labeled  $t$  and a vertical axis labeled  $f_2$ . A curve starts at the origin, rises to a peak, and then falls, crossing the  $t$  axis. Two points are marked on the curve: point 3 is at the start of the rising part, and point 4 is on the falling part. A horizontal dashed line connects point 3 to the left plot. A vertical dashed line connects point 4 to the left plot. A vertical dashed line also connects the origin of the right plot to the left plot. Labels  $f_{1i}$  and  $f_{2i}$  are present near the origin of the left plot, and  $t_i$  is near the origin of the right plot.

данного сигнала  $f_1(t)$ , который располагается под графиком искомой реакции  $f_2(t)$ . Как видно из построений на рис. 2.3, точка  $f_{1i}$  заданного сигнала проектируется сначала горизонтальной линией на отрезок прямой в точку  $f'_{1i}$ , которая затем соответствующей вертикальной линией проектируется на график характеристики, а оттуда в точку  $f_{2i}$  искомой реакции. Последние два действия идентичны рассмотренному ранее способу.

Из рассмотрения форм реакций, полученных в приведенных примерах, можно сделать следующий вывод. Если *монотонная*

характеристика цепи имеет вогнутую форму, то выходная реакция имеет заостренную форму. Если же монотонная характеристика имеет выпуклую форму, то реакция получает более плоскую по сравнению с входным сигналом форму.

Сделанный выход не относится к постоянному сигналу, в частности, к сигналу строго прямоугольной формы — здесь выходная реакция также будет иметь прямоугольную форму.

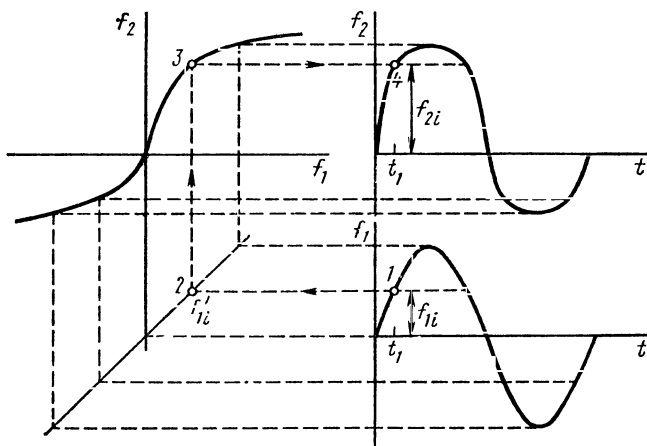


Рис. 2.3

Влияние нелинейной характеристики скажется лишь на том, что амплитуды реакции и входного сигнала не будут пропорциональными.

Преимуществами графического метода определения реакции по известной входной или передаточной характеристике цепи являются простота, наглядность и возможность нахождения характеристики, обеспечивающей желательное преобразование входного сигнала.

Остановимся теперь на *аналитическом методе определения реакции по заданному входному сигналу*. Для аналитического определения реакции необходимо иметь выражения действующего в цепи сигнала и входной или передаточной характеристики также в аналитическом виде. Если характеристика цепи получена графическим методом, то она должна быть аппроксимирована, т. е. приближенно представлена в аналитическом виде.

Пусть характеристика представлена функцией

$$f_2 = g(f_1).$$

Если входной сигнал задан в виде функции

$$f_1 = f_1(t),$$

то искомую реакцию как функцию времени можно получить подстановкой  $f_1$  в выражение характеристики

$$f_2 = g[f_1(t)]. \quad (2.3)$$

В § 1.6 было показано, что характеристику удобно представлять полиномом степени  $n$ :

$$g(f_1) = a_0 + a_1 f_1 + a_2 f_1^2 + \dots + a_n f_1^n.$$

Для получения выходной реакции входной сигнал необходимо возвести в степени от 0 до  $n$ , умножить на соответствующие коэффициенты и просуммировать. Выходная реакция будет нелинейной функцией входного сигнала при  $n > 1$ .

Аналитическое определение дает выходную реакцию в виде аналитического выражения — явной функции времени. Главное преимущество аналитического метода определения реакции состоит в том, что он позволяет сделать заключения о некоторых общих свойствах нелинейных цепей, имеющих принципиальный характер. К одному из таких выводов относится вопрос преобразования спектров сигналов нелинейной цепью, который ввиду особой важности подробно рассмотрен в § 2.10.

### § 2.3. Метод преобразования схем

Метод преобразования схем не обладает общностью численного метода, который рассматривается далее. Он применим к цепям лестничной конфигурации, т. е. к параллельно-последовательным цепям с одним источником переменного сигнала. Но цепи такой структуры являются наиболее распространенными и важными.

Применительно к лестничным цепям *метод преобразований состоит в повторной замене последовательно или параллельно соединенных ветвей одной эквивалентной ветвью*. Метод позволяет для цепей лестничной структуры производить расчеты без составления уравнений с помощью графических построений. При этом имеют дело непосредственно с исходными характеристиками, которые представляются в форме графиков. Вид характеристики и степень ее сложности не влияют на ход расчета. С помощью графических расчетов можно получить сразу все возможные решения, и вопросы существования и единственности решения не имеют значения. Очень важное преимущество графических расчетов состоит в том, что они позволяют на-

глядно выявить влияние характеристик отдельных элементов на результирующие характеристики всей цепи.

Рассмотрим применение метода преобразования схем последовательно-параллельных цепей раздельно для получения входных и передаточных характеристик.

**Определение входной характеристики.** Графический метод определения входной вольт-амперной характеристики, как указано, применяется к нелинейному двухполюснику, составленному из последовательно-параллельно соединенных резистивных элементов (рис. 2.4).

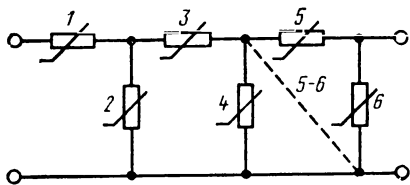


Рис. 2.4

Суть метода очень проста и может быть пояснена на простейшем примере двухполюсника, состоящего из двух последовательно соединенных резистивных элементов  $R_1$  и  $R_2$

(рис. 2.5, а). Через оба элемента протекает один и тот же ток, а общее напряжение равно сумме напряжений на элементах. Поэтому для указанных на схеме положительных направлений токов и напряжений можно записать

$$i_1 = i_2 = i; \quad u_1 + u_2 = u. \quad (2.4)$$

Уравнения элементов (вольт-амперные характеристики) будут иметь вид

$$u_1 = u_1(i); \quad u_2 = u_2(i). \quad (2.5)$$

Характеристики обоих элементов в совмещенных координатных системах изображены на рис. 2.5, а.

Подставив во второе уравнение (2.4) выражения (2.5), после замены в них токов  $i_1$  и  $i_2$  общим током  $i$  цепи получим

$$u_1(i) + u_2(i) = u(i). \quad (2.6)$$

Правая часть представляет искомую входную характеристику. Графически уравнение (2.6) может быть решено путем суммирования абсцисс характеристик отдельных элементов для любого значения тока  $i$ , протекающего через оба элемента. На рис. 2.5, б показано суммирование абсцисс характеристик обоих элементов, построенных в одной системе координат (кривые 1 и 2). Суммирование абсцисс произведено с помощью горизонтальных пунктирных линий, соответствующих ряду значений тока, общего для обоих элементов. В результате по-

лучена кривая 3, представляющая искомую входную или вольт-амперную характеристику нелинейного двухполюсника.

Существенное преимущество графического метода состоит в том, что характеристики элементов могут иметь любую сложную форму, в частности и падающие участки.

Уравнение, определяющее входную характеристику результирующей цепи, может быть решено также аналитически. Для этого необходимо иметь аналитические выражения вход-

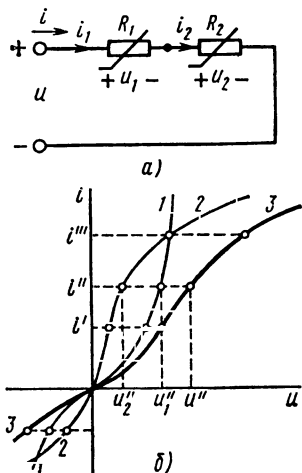


Рис. 2.5

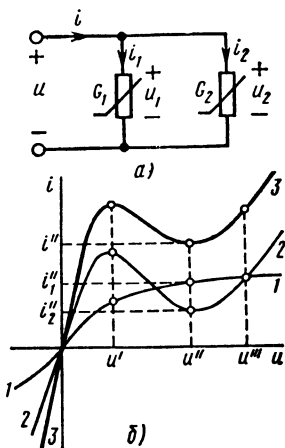


Рис. 2.6

ных характеристик элементов двухполюсника  $u_1(i)$  и  $u_2(i)$ . Пусть характеристики элементов двухполюсника приближенно представлены полиномами:

$$u_1 = a_1 i + a_2 i^2 + a_3 i^3;$$

$$u_2 = b_1 i + b_2 i^2 + b_3 i^3 + b_4 i^4.$$

Чем сложнее вид характеристики, тем выше порядок полинома. Согласно (2.6) общее напряжение на обоих элементах, т. е. искомая характеристика, представится также полиномом:

$$u = (a_1 + b_1) i + (a_2 + b_2) i^2 + (a_3 + b_3) i^3 + b_4 i^4.$$

Приведенные графический и аналитический методы определения входной характеристики, очевидно, применимы для последовательного соединения любого числа резистивных элементов — здесь суммируются графики или выражения нескольких характеристик.

При параллельном соединении двух резистивных элементов  $G_1$  и  $G_2$  (рис. 2.6, а) получаются уравнения, полностью дублирующие разобранный случай последовательного соединения элементов. Напряжения на обоих элементах одинаковы, а общий ток равен сумме токов элементов:

$$u_1 = u_2 = u; i_1 + i_2 = i. \quad (2.7)$$

Вольт-амперные характеристики элементов

$$i_1 = i_1(u_1); i_2 = i_2(u_2) \quad (2.8)$$

в совмещенных координатных системах изображены на рис. 2.6, б (кривые 1 и 2). Заменяя в (2.8) напряжения на элементах общим напряжением, второе уравнение (2.7) можно записать таким образом:

$$i_1(u) + i_2(u) = i(u). \quad (2.9)$$

Как видно, для получения результирующей входной характеристики  $i(u)$  цепи необходимо просуммировать ординаты характеристик элементов для ряда вертикальных линий, соответствующих выбранным значениям напряжений, как показано на рис. 2.6, б. Результирующая входная характеристика получена в виде графика 3.

Для аналитического решения рассматриваемой задачи следует иметь приближенные выражения входных характеристик каждого двухполюсника  $i_1(u)$  и  $i_2(u)$ , например, в виде полиномиального приближения. Просуммировав токи обоих элементов, получим выражение искомой результирующей характеристики также в виде полинома.

Рассмотрим некоторые особые виды характеристик элементов. Если один из элементов имеет многозначную характеристику с несколькими монотонными ветвями, то ординаты монотонной характеристики следует добавлять к ординатам каждой ветви немонотонной характеристики. Результирующая характеристика получится также немонотонной.

На рис. 2.7 показано суммирование двух характеристик — монотонной 2 и немонотонной 1 с тремя ветвями. Результирующая характеристика 3, полученная суммированием ординат обеих характеристик, является немонотонной.

На рис. 2.7 исходные характеристики имеют кусочно-линейное представление, которое упрощает суммирование графиков — здесь достаточно просуммировать ординаты, соответствующие изломам обеих характеристик, и соединить полученные точки отрезками прямых. Результирующая характеристика получается также кусочно-линейной с большим числом линейных участков.

Если характеристики обоих параллельно или последовательно соединенных элементов являются немонотонными и имеют по несколько ветвей, то построение результирующей характеристики усложняется, так как необходимо суммировать ординаты всех комбинаций отдельных ветвей характеристик первого и второго элементов. Если первая характеристика имеет три ветви:  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  и  $\gamma_1$ , а вторая — также три ветви  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$  и  $\gamma_2$ ,

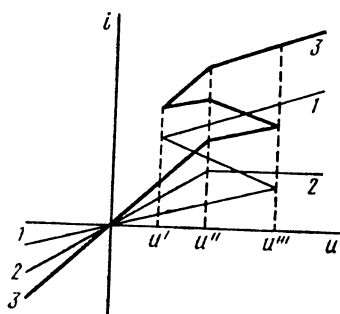


Рис. 2.7

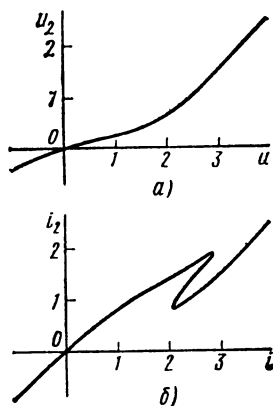


Рис. 2.8

то следует просуммировать ординаты следующих комбинаций ветвей:

$$\alpha_1\alpha_2; \alpha_1\beta_2; \alpha_1\gamma_2; \beta_1\alpha_2; \beta_1\beta_2; \beta_1\gamma_2; \quad \gamma_1\alpha_2; \gamma_1\beta_2; \gamma_1\gamma_2.$$

Изложенный графический метод получения входных характеристик последовательно или параллельно соединенных ветвей путем суммирования абсцисс или ординат графиков легко распространить на случай лестничной цепи, состоящей из попеременного последовательного и параллельного соединений отдельных двухполюсных элементов (см. рис.2.4). Построения необходимо начать с крайнего правого конца цепи. Для цепи рис. 2.4 сначала следует найти общую характеристику двух последовательных ветвей 5 и 6, далее определить характеристику, общую для полученной ветви 5—6 и ветви 4, соединенных параллельно, и т. д.

Процесс попеременного нахождения характеристик последовательно и параллельно соединенных ветвей лестничной цепи заканчивается учетом первой со стороны входа ветви 1. Так как новые этапы построений выполняются аналогично рассмотренным приемам суммирования абсцисс или ординат ха-



рактических, нет необходимости в подробном разборе отдельного примера. Применение аналитических представлений характеристик элементов затруднено в связи с тем, что при переходах от параллельного соединения к последовательному и от последовательного к параллельному требуются обращения выражений характеристик, что не всегда возможно.

**Определение передаточной характеристики.** Передаточная характеристика резистивной цепи, как указывалось, представляет зависимость выходной реакции — напряжения или тока в ветви на выходе цепи — от напряжения или тока источника, действующего на входе. Поскольку вход и выход цепи относятся к различным ветвям, здесь имеем дело с четырехполюсником.

Рассмотрим графический метод построения передаточной характеристики, который полностью базируется на подробно разобранном методе определения входной характеристики. На графиках, построенных для нахождения входной характеристики, содержатся все данные, необходимые для построения передаточной характеристики. Поэтому при изложении графического метода определения передаточной характеристики используем приведенные построения по определению входных характеристик.

Разберем простейший пример цепи из последовательно соединенных резистивных элементов  $R_1$  и  $R_2$ , подключенных к источнику напряжения  $u$  (см. рис. 2.5, а). Пусть исходной выходной реакцией является напряжение  $u_2$  на резисторе  $R_2$ . Задача состоит в построении с помощью графического метода передаточной характеристики  $u_2 = u_2(u)$  для цепи, называемой делителем напряжения. Воспользуемся найденным графическим решением уравнения (2.6) равновесия напряжений в цепи из последовательно соединенных двух элементов. Процесс решения показан на рис. 2.5, б, где приведены характеристики обоих элементов  $u_1(i)$  и  $u_2(i)$  и полученная суммированием их абсцисс входная характеристика  $u(i)$  цепи.

Для построения передаточной характеристики необходимо иметь пары значений  $u-u_2$ , определяющие точки кривой. Имея характеристики, приведенные на рис. 2.5, б, задаемся значением входного напряжения, например,  $u = u''$ . Из входной характеристики определяем соответствующее значение тока в цепи  $i''$ , а по нему из характеристики выходного элемента  $u_2(i)$  — искомое значение выходного напряжения  $u_2''$ . Найденная пара значений  $u''-u_2''$  дает одну точку передаточной характеристики. Подобным же образом определяем другие точки передаточной характеристики, изображенной на рис. 2.8, а.

Аналогично на дуальной основе можно рассмотреть передаточную характеристику цепи из двух параллельно соединенных резистивных элементов  $G_1$  и  $G_2$  (см. рис. 2.6, а), называемой делителем тока. Здесь интересующей выходной реакцией является ток  $i_2$  второго элемента, а заданным на входе цепи сигналом — ток источника  $i$ , так что должна быть определена передаточная характеристика  $i_2 = i_2(i)$ , найденная для ряда значений напряжений на обоих элементах.

Расчет должен начаться с определения по заданным характеристикам обоих элементов результирующей входной характеристики, ко-

торая также была получена раньше с помощью построений, приведенных на рис. 2.6, б. Точка искомой передаточной характеристики определяется парой значений  $i-i_2$  входного и выходного токов. Задавшись значением входного тока, например,  $i = i''$ , из входной характеристики находим соответствующее значение напряжения  $u''$  (см. рис. 2.6, б), а по нему из характеристики выходного элемента  $i_2(u)$  — значение выходного тока  $i_2'$ . Аналогично определяем другие пары переменных передаточной характеристики токов (рис. 2.8, б).

Изложенный применительно к простейшим делителям из двух элементов графический метод построения передаточной характеристики можно использовать и для более сложных лестничных цепей. Метод основан, так же как и в случае простейших делителей, на построении входной характеристики лестничной цепи попеременным суммированием ординат и абсцисс характеристик отдельных ветвей и их комбинаций. При наличии характеристик всех ветвей и их комбинаций, задавшись входным напряжением или током, можно, переходя от графика к графику, дойти до характеристики выходной ветви и найти выходное напряжение или ток.

#### **§ 2.4. Анализ нелинейных резистивных цепей методом последовательных кусочно-линейных схем**

Метод последовательных кусочно-линейных схем основан на представлении характеристик всех нелинейных элементов кусочно-линейными приближениями. Такое представление существенно упрощает анализ нелинейных цепей, так как в интервалах между изломами характеристик цепь оказывается линейной. Анализ линеаризованной цепи, полученной в результате кусочно-линейного представления характеристик, можно произвести простыми методами теории линейных резистивных цепей.

В § 2.3 было рассмотрено применение кусочно-линейного представления характеристик элементов лестничной цепи для получения входной и передаточной характеристик всей цепи. Кусочно-линейное представление, как было показано, значительно облегчает графическое суммирование ординат и абсцисс характеристик параллельно или последовательно соединенных элементов. В случае цепей лестничной структуры применение кусочно-линейного представления нелинейных характеристик является эффективным и оправданным.

Здесь рассмотрим использование кусочно-линейного представления характеристик для получения последовательных кусочно-линейных схем замещения. Метод анализа нелинейных резистивных цепей с помощью последовательных кусочно-линейных схем обладает следующими преимуществами: 1) позво-

ляет производить анализ цепей любой конфигурации, содержащих как двухполюсные, так и многополюсные элементы, а также такие элементы, как управляемые источники; 2) в пределах линейных участков, т. е. за исключением отдельных точек излома характеристик, имеем линейную резистивную цепь, для анализа которой можно применить методы теории линейных цепей.

*Кусочно-линейная схема замещения получается в результате представления каждого элемента на линейном участке характеристики линеаризованной схемой, состоящей из линейного резистивного элемента и источника постоянного напряжения или тока.*

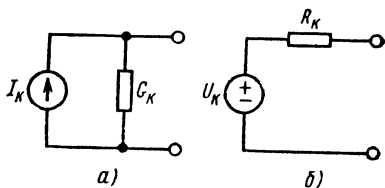


Рис. 2.9

Как было установлено в § 1.6, уравнение отрезка прямой  $k$ -го интервала можно записать в двух формах:

$$i = ku + I_k; \quad u = k'i + U_k,$$

где  $k$ ,  $k'$  — тангенсы углов между прямой и осями  $u$  и  $i$  соответственно;  $I_k$ ,  $U_k$  — ордината и абсцисса точек пересечения прямой с осями ординат и абсцисс.

Первому уравнению соответствует схема замещения (рис. 2.9, а), состоящая из источника тока с постоянным током  $I_k$ , равным ординате точки пересечения линии с осью ординат, и параллельно соединенной резистивной ветви с проводимостью  $G_k = k$ , где  $k$  — угловой коэффициент.

Второму уравнению соответствует схема замещения (рис. 2.9, б), состоящая из источника напряжения с постоянным напряжением  $U_k$ , равным абсциссе точки пересечения линии с осью абсцисс, и последовательно соединенной резистивной ветви с сопротивлением  $R_k = k' = 1/k$ .

Как видим, любой линейный участок характеристики с конечным ненулевым угловым коэффициентом может быть представлен одной из двух эквивалентных схем замещения с источником постоянного тока или напряжения, которые могут быть преобразованы друг в друга по теореме об эквивалентных источниках.

Рассмотрим три частных случая.

1. Если прямая — продолжение отрезка — проходит через начало координат, то ток  $I_k = 0$ , напряжение  $U_k = 0$  и схема замещения состоит только из резистивной ветви без источников, как в случае пассивного линейного резистора.

2. Если имеется участок с вертикальным отрезком, то угловой коэффициент  $k = \infty$ , сопротивление  $R_k = 0$  и схема замещения состоит только из источника постоянного напряжения, величина напряжения  $U_k$  которого соответствует удалению отрезка от оси ординат. Следовательно, здесь возможна только единственная схема с идеальным источником постоянного напряжения.

3. Если имеется участок с горизонтальным отрезком, то угловой коэффициент  $k = 0$ , проводимость  $G_k = 0$  и схема замещения состоит только из источника постоянного тока, значение тока  $I_k$  которого соответствует удалению отрезка от оси абсцисс. Здесь возможна только единственная схема с идеальным источником постоянного тока.

В общем случае каждый элемент на любом линейном участке может быть представлен схемой из двух элементов: линейного резистивного элемента и источника постоянного напряжения или тока. *Структура или топология кусочно-линейной схемы одинакова для всех линейных участков, т. е. для всех режимов цепи.* Переход от одного участка к другому отразится лишь на числовых значениях линейных сопротивлений, а также напряжений и токов источников.

Цель расчета кусочно-линейной цепи при рассматриваемой постановке задачи анализа нелинейной резистивной цепи состоит в определении входной и передаточной характеристик.

Входные и передаточные характеристики кусочно-линейной цепи, очевидно, будут иметь также кусочно-линейный вид. Каждый линейный участок этих характеристик соответствует определенному сочетанию линейных участков отдельных элементов цепи. Возможные сочетания линейных участков различных элементов для любого заданного значения входного сигнала в виде постоянного напряжения или тока зависят от конфигурации (топологии) цепи и вида характеристик отдельных элементов. Изменение величины входного сигнала, превышающее некоторое пороговое значение, приведет к переходу через точку излома характеристики одного из элементов и, следовательно, к новому сочетанию линейных участков.

Главная трудность анализа нелинейных резистивных цепей методом кусочно-линейных схем связана с тем, что заранее неизвестно сочетание линейных участков, соответствующее заданному входному напряжению и, следовательно, определенному линейному участку входной или передаточной характеристики.

*Искомое сочетание линейных участков всех элементов определяется перебором возможных сочетаний отдельных линейных участков характеристик всех элементов.* Для любого принятого

сочетания параметров схемы известны и могут быть определены напряжения и токи всех элементов. Если значения напряжений и токов всех элементов лежат в границах соответствующих линейных участков, то принятое сочетание дает верный результат. Если хотя бы у одного элемента ток и напряжение выходят за границы линейного участка, то следует перейти к следующему сочетанию. Всегда имеется единственное сочетание линейных участков элементов, соответствующее изменению входного сигнала в некоторых пределах.

Для цепей со многими нелинейными элементами анализ линеаризованной цепи приходится производить при определенных числовых значениях параметров для каждого сочетания линейных участков. Анализ должен дать выражения токов (напряжений) каждого нелинейного элемента в зависимости от величины входного сигнала. Приравнивая эти выражения значениям токов (напряжений) точек излома характеристик, легко найти наименьшее значение входного сигнала, при котором рабочая точка переходит на следующий линейный участок характеристики одного из элементов и, следовательно, процесс будет определяться следующим сочетанием линейных участков. Далее указанные расчеты повторяют для измененных параметров одного из элементов. Ввиду неизменности топологии цепи вычисления получаются однотипными. Так как при большом числе возможных сочетаний требуются объемные расчеты, необходимо использовать ЦВМ.

Для простых кусочно-линейных цепей расчеты линеаризованной цепи можно произвести с буквенным заданием параметров ( $R_k$ ,  $U_k$ ). Числовые значения параметров линейных участков подставляют лишь на конечном этапе расчетов для определения величины входного сигнала, приводящего к излому характеристики одного из элементов и к следующему сочетанию линейных участков.

Для уяснения основных моментов анализа нелинейных резистивных цепей методом последовательных кусочно-линейных схем рассмотрим примеры, иллюстрирующие ход расчетов.

**Пример 2.1.** Требуется найти входную и передаточную характеристики цепи (рис. 2.10, а), состоящей из двух последовательно соединенных нелинейных резистивных элементов (делитель напряжения). Кусочно-линейные вольт-амперные характеристики элементов приведены на рис. 2.11, а. Данные отдельных линейных участков: сопротивления, границы отрезков, определяемые точками излома, а также напряжения, соответствующие точкам пересечения линий с осью  $u$ , даны в таблице, приведенной на рис. 2.10, в.

Оба элемента соединены последовательно, поэтому удобно использовать кусочно-линейную схему замещения с источниками напряжения (рис. 2.10, б).

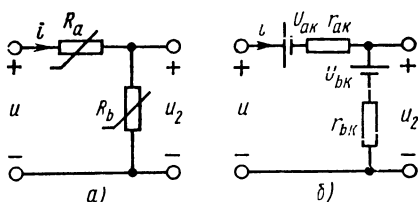
Так как цепь линейна, нетрудно найти зависимости входного тока и выходного напряжения от входного напряжения  $u$ , которые и будут искомыми характеристиками.

Для входного тока, равного также токам каждого из нелинейных элементов, имеем

$$i = \frac{u - (U_{ak} + U_{bk})}{r_{ak} + r_{bk}}. \quad (2.10)$$

Выходное напряжение, определяющее передаточную характеристику,

$$\begin{aligned} u_2 &= r_{bk} i + U_{bk} = \\ &= \frac{r_{bk}}{r_{ak} + r_{bk}} - \frac{r_{bk}}{r_{ak} + r_{bk}} \times \\ &\times (U_{ak} + U_{bk}) + U_{bk}. \quad (2.11) \end{aligned}$$



Участок	Граница $u, B$	Граница $i, A$	$r_k, \Omega$	$U_k, B$
a1	$-\infty \div -2$	$-\infty \div 1$	0,5	-2,5
a2	$-2 \div \infty$	$1 \div \infty$	2	-4
b1	$-\infty \div 1$	$-\infty \div -1$	2	3
b2	$1 \div \infty$	$-1 \div \infty$	0,5	1,5

б)

Рис. 2.10

Для любого сочетания линейных участков входной ток и выходное напряжение линейно зависят от напряжения на входе. При переходе к новому сочетанию изменятся коэффициенты в выражениях. Следовательно, входная и передаточная характеристики будут состоять также из кусочно-линейных участков, число которых зависит от числа возможных сочетаний линейных участков обоих элементов при изменении напряжения на входе в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Для рассматриваемой цепи легко сразу установить возможные сочетания линейных участков и границы изменения напряжения на входе, соответствующие каждому сочетанию.

Так как ток в обоих элементах одинаков и равен входному току, проще всего установить искомые границы при изменении тока от  $-\infty$  до  $+\infty$ . При нарастании тока, как видно из рис. 2.11, а, процесс идет по участкам 1 характеристик обоих элементов до граничной точки

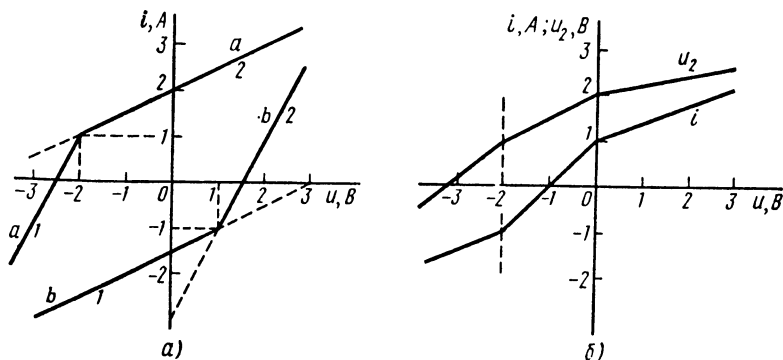


Рис. 2.11

излома  $i = -1$  характеристики элемента  $b$ . Затем процесс определяется сочетанием участка 1 элемента  $a$  и участка 2 элемента  $b$  до граничной точки  $i = 1$  на характеристике первого элемента. Наконец, при  $i > 1$  процесс определяется участками 2 обоих элементов. Для установившихся трех сочетаний линейных участков получим соответственно три линейных участка искомых входной и передаточной характеристик.

Рассмотрим последовательно указанные сочетания линейных участков и найдем границы изменения входного напряжения и выражения входной и передаточной характеристик для каждого сочетания.

1. Участки 1 характеристик обоих элементов ( $a1; b1$ ):  $r_a = 0,5 \text{ Ом}$ ;  $U_a = 2,5 \text{ В}$ ;  $r_b = 2 \text{ Ом}$ ;  $U_b = 3 \text{ В}$ .

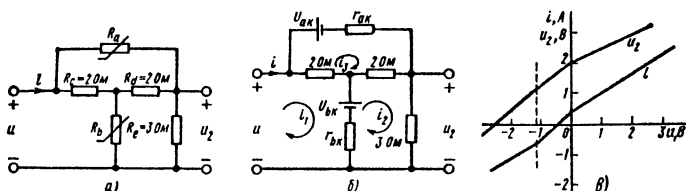


Рис. 2.12

Подставив значения параметров в (2.10), получим  $i = -0,2 + 0,4u$ .

До точки излома характеристики элемента  $b$  ток  $i \leq -1$ . Отсюда границы изменения входного напряжения для рассматриваемого сочетания  $-\infty \leq u \leq -2$ .

Выходное напряжение согласно (2.28):  $u_2 = 2,6 + 0,8u$ .

2. Участок 1 характеристики элемента  $a$  и участок 2 элемента  $b$  ( $a1; b2$ ):  $r_a = 0,5 \text{ Ом}$ ;  $U_a = -2,5 \text{ В}$ ;  $r_b = 0,5 \text{ Ом}$ ;  $U_b = 1,5 \text{ В}$ .

Ток элементов, равный входному току, согласно (2.10)  $i = u + 1$ .

До точки излома характеристики элемента  $a$  ток  $-1 \leq i \leq 1$ .

Границы изменения входного напряжения:  $-2 \leq u \leq 0$ .

Выходное напряжение:  $u_2 = 2 + 0,5u$ .

3. Участки 2 характеристик обоих элементов ( $a2; b2$ ):  $r_a = 2 \text{ Ом}$ ;  $U_a = -4 \text{ В}$ ;  $r_b = 0,5 \text{ Ом}$ ;  $U_b = 1,5 \text{ В}$ .

Входной ток (ток элементов) согласно (2.10)

$$i = 1 + 0,4u,$$

где  $i \geq 1$  и  $u > 0$ .

Выходное напряжение

$$u_2 = 2 + 0,2u \quad (u \geq 0).$$

На рис. 2.11, б изображены полученные входная и передаточная характеристики, которые имеют по три линейных участка (по числу сочетаний линейных участков кусочно-линейных характеристик).

**Пример 2.2.** Требуется найти входную и передаточную характеристики цепи, изображенной на рис. 2.12, а. Цепь имеет перекрытую Т-образную структуру. Два резистивных элемента  $R_a$  и  $R_b$  цепи нелинейны. В качестве характеристик этих элементов примем кусочно-линейные характеристики, приведенные на рис. 2.11, а; параметры характеристик содержатся в таблице (см. рис. 2.10, в). Остальные элементы цепи являются линейными; их сопротивления указаны на схеме.

На рис. 2.12, б приведена кусочно-линейная схема замещения, полученная представлением линейных участков ветвью из резистивно-го элемента и источника, соединенных последовательно.

Для нахождения границ изменения  $u$ , в пределах которых процесс определяется тем или иным сочетанием линейных участков характеристик обоих нелинейных элементов, нужно получить выражения токов в элементах  $R_a$  и  $R_b$ . Необходимо также иметь зависимости выходного напряжения и входного тока от входного напряжения, по которым можно построить искомые характеристики.

Анализ линеаризованной цепи произведем по методу контурных токов. Уравнения контурных токов запишем в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 2+r_b & -r_b & -2 \\ -r_b & 5+r_b & -2 \\ -2 & -2 & 4+r_a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u-U_b \\ U_b \\ -U_a \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Определитель матрицы

$$D = 12 + 10r_a + 12r_b + 7r_ar_b. \quad (2.13)$$

Токи контуров

$$i_k = D_k/D, \quad (2.14)$$

где  $D_k$  — определитель, получающийся заменой  $k$ -го столбца правой частью (2.12).

Вычисления дают следующие выражения  $D_k$ :

$$\begin{aligned} D_1 &= u(16 + 5r_a + 4r_b + r_ar_b) - U_a(10 + 4r_b) - U_b(12 + 5r_a); \\ D_2 &= u(4 + 4r_b + r_ar_b) + U_b 2r_a - U_a(4 + 4r_b); \\ D_3 &= u(10 + 4r_b) - 6U_b - U_a(10 + 7r_b). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Запишем выражения для токов нелинейных резистивных элементов:

$$\begin{aligned} i_a &= i_3 = D_3/D; \\ i_b &= i_1 - i_2 = (D_1 - D_2)/D. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Искомые входная и передаточная характеристики запишутся в виде

$$\begin{aligned} i_1 &= D_1/D; \\ u_2 &= R_2 i_2 = R_2 D_2/D. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Рассмотрим последовательно различные сочетания линейных участков и найдем границы изменения входного напряжения для каждого сочетания.

1. Участки  $a1$ ;  $b1$ :  $r_a = 0,5$  Ом;  $U_a = -2,5$  В;  $r_b = 2$  Ом;  $U_b = 3$  В.

Для указанных параметров определители (2.13) и (2.15) принимают значения:

$$\begin{aligned} D &= 48; \quad D_2 = 13u + 33; \\ D_1 &= 27,5u + 1,5; \quad D_3 = 18u + 42. \end{aligned}$$

Излом характеристики элемента  $b$  наступает согласно (2.16) при

$$i_b = (D_1 - D_2)/D = (14,5u - 31,5)/48 = -1,$$

т. е. при  $u = -1,14$ .



Если аналогичные расчеты провести для тока элемента  $a$ , где для точки излома должно выполняться условие  $i_a = 1$ , то получим

$$u = -0,333;$$

$$-\infty \leq u \leq -1/3 > -1,14.$$

Следовательно, излом характеристики элемента  $b$  наступает раньше, так что при  $u \geq -1,14$  следует перейти к следующему сочетанию линейных участков. При  $-\infty < u \leq -1,14$  искомыми характеристиками в соответствии с (2.17) будут

$$i = D_1/D = 0,573u + 0,031;$$

$$u_2 = 0,812u + 2,07.$$

2. Участки  $a1$ ;  $b2$ :  $r_a = 0,5$  Ом;  $U_a = -2,5$  В;  $r_b = 0,5$  Ом;  $U_b = 1,5$  В.

Для приведенных параметров определители принимают значения:

$$D = 24,75; \quad D_2 = 6,25u + 16,5;$$

$$D_1 = 20,75u + 8,25; \quad D_3 = 12u + 24,75.$$

Излом характеристики элемента  $a$  наступит согласно (2.16) при

$$i_a = D_3/D = \frac{12u + 24,75}{24,75} = 1,$$

т. е. при  $u = 0$ .

При  $-1,14 \leq u \leq 0$  входная и передаточная характеристики будут определяться выражениями:

$$i = D_1/D = 0,833u + 0,333;$$

$$a_2 = R_2 \frac{D_2}{D} = 0,758u + 2,0.$$

3. Участки  $a2$ ;  $b2$ :  $r_a = 2$  Ом;  $U_a = -4$  В;  $r_b = 0,5$  Ом;  $U_b = 1,5$  В.

При данных параметрах определители имеют значения:

$$D = 45; \quad D_2 = 7u + 30;$$

$$D_1 = 29u + 15; \quad D_3 = 12u + 45.$$

При  $u \geq 0$  выражения входной и передаточной характеристик приобретают вид

$$i = D_1/D = 0,645u + 0,333;$$

$$u_2 = R_2 D_2/D = 0,467u + 2,0. \quad (2.18)$$

На рис. 2.12, в изображены найденные характеристики — входная  $i$  и передаточная  $u_2$ , которые имеют также кусочно-линейный вид. Число линейных участков равно числу сочетаний кусочных интервалов характеристик.

## § 2.5. Уравнения нелинейных резистивных цепей

Для анализа цепи с помощью численных методов необходимо составить систему уравнений относительно выбранных неизвестных переменных.

Рассмотрим общие соображения по составлению уравнений, описывающих поведение резистивных нелинейных цепей. Будем полагать цепь состоящей из двухполюсных нелинейных и линейных резистивных элементов и источников. Следует отметить, что в нелинейной цепи, как правило, каждый элемент удобно принимать в качестве отдельной ветви. Общее число ветвей — элементов обозначим через  $n_v$ , а число узлов — точек соединений ветвей — через  $n_y$ .

*Уравнения цепи* составляются на основе двух независимых друг от друга систем: 1) уравнений элементов, определяемых их характеристиками; 2) уравнений соединений (топологических уравнений), определяемых способом или структурой взаимных соединений ветвей цепи.

Уравнения элементов, связывающие ток и напряжение каждой ветви, записывают путем приближенного аналитического представления (аппроксимации) вольт-амперных характеристик, которые, как указывалось, задаются обычно в виде графиков или таблиц.

Будем предполагать, что вольт-амперные характеристики резистивных элементов в соответствии с § 1.5 представлены полиномами степени  $n$  или в некоторых случаях трансцендентными функциями. *Уравнения элементов*, следовательно, могут быть записаны аналитически в виде следующих функциональных зависимостей:

$$u_j = u_j(i_j) \quad (j = 1, 2, \dots, v); \quad (2.19)$$

$$i_k = i_k(u_k) \quad (k = v + 1, v + 2, \dots, n_v). \quad (2.20)$$

Общее число уравнений элементов, связывающих  $2n_v$  токов и напряжений ветвей, равно числу  $n_v$  ветвей.

Для линейных резистивных элементов уравнения представляют по закону Ома взаимнообратимыми линейными соотношениями  $u_j = R_j i_j$  и  $i_j = G_j u_j$ , а для нелинейных элементов с монотонными характеристиками — взаимнообратными функциями  $u_j = u_j(i_j)$  и  $i_j = i_j(u_j)$ . В случае немонотонных характеристик, управляемых током, возможно только представление (2.19), а управляемых напряжением — (2.20).

Перейдем к рассмотрению *топологических уравнений*, которые не зависят от вида и свойств ветвей, а только от структуры (топологии) взаимного соединения элементов. Число уравнений, записываемых по законам токов и напряжений Кирхгофа, должно быть равно числу ветвей цепи. При этом очень важным условием является получение заведомо линейно независимой системы уравнений. Как известно, условие линейной независимости уравнений можно всегда обеспечить, если исполь-

зовать понятие направленного графа цепи и его подграфов — дерева, главного контура и главного сечения. Напомним кратко смысл этих понятий.

*Линейный граф* цепи получают, сопоставляя каждому узлу цепи вершину (узел) графа, изображаемую точкой, и каждой ветви цепи ребро (ветвь) графа, изображаемое линией. Если на всех ребрах (ветвях) графа указать стрелками выбранные положительные направления токов, согласованные с положительными направлениями (полярностями) напряжений, то получим *направленный граф* цепи, содержащий все данные

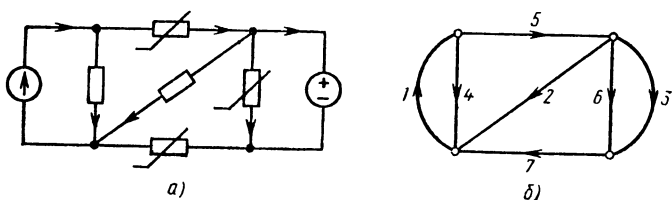


Рис. 2.13

цепи, необходимые для записи уравнений соединений цепи по законам Кирхгофа. На рис. 2.13, а изображена цепь с  $n_y = 4$  и  $n_b = 7$  с указанными положительными направлениями токов, а на рис. 2.13, б — ее направленный граф.

Направленный граф цепи аналитически записывают  $n_y \times n_b$  матрицей соединений (инциденции),  $n_y$  строк которой являются порядковыми номерами узлов, а  $n_b$  столбцов — номерами ветвей. Элементы этой матрицы равны 1, если ветвь выходит из узла, —1, если ветвь входит в узел, и 0, если ветвь не связана с узлом. Матрица соединений для графа рис. 2.13, б имеет вид:

$$A_a = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Так как каждая ветвь соединяет два узла — выходит из одного узла и входит в другой, каждый столбец матрицы состоит из двух элементов: 1 и —1. Следовательно, элементы столбца зависимы (их сумма равна нулю), так что достаточно заполнить таблицу  $n_y - 1$  узлов. При вычеркивании строки, соответствующей выбранному базисному узлу, получается независимая матрица соединений  $A$ .

Любую часть графа, элементы (узлы и ветви) которого являются элементами исходного графа, называют **подграфом**. Подграф получают путем удаления некоторых ветвей графа. Важнейшими подграфами графа являются сечение, контур и дерево.

**Сечение** — это система ветвей, удаление или рассечение которых разбивает граф на две не связанные между собой части. На рис. 2.14, а показан граф, у которого ветви, пересекаемые пунктирными линиями (следом замкнутой поверхности), образуют некоторые из сечений.

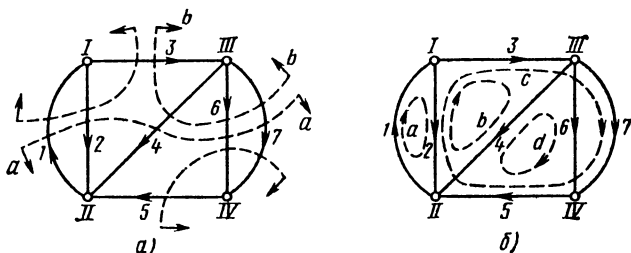


Рис. 2.14

**Контур** — это непрерывная последовательность ветвей, образующих замкнутый путь. На рис. 2.14, б пунктирными замкнутыми линиями изображены некоторые из контуров.

**Законы Кирхгофа** о равновесии токов и напряжений в цепи формулируются следующим образом.

1. Алгебраическая сумма токов ветвей сечения в любой момент времени равна нулю:

$$\sum \pm i_k = 0. \quad (2.22)$$

2. Алгебраическая сумма напряжений ветвей контура в любой момент времени равна нулю:

$$\sum \pm u_k = 0. \quad (2.23)$$

Первый закон Кирхгофа сформулирован в более общем виде — для сечения, а не для узла, как обычно. Легко убедиться в справедливости обобщения на примере (рис. 2.14, а) ветвей сечения, связывающих пару узлов I, II с остальными узлами цепи. Если составить уравнения равновесия токов для узлов I и II и просуммировать их, то токи ветвей, связывающих оба узла, сократятся, так как они входят в оба уравнения с разными знаками; останутся лишь токи ветвей сечения, которые входят в рассматриваемые узлы один раз.

Уравнения (2.22) и (2.23) являются линейными однородными уравнениями для токов и напряжений: переменные входят в первой степени и правые части равны нулю. Коэффициенты при переменных принимают значения  $\pm 1$  в зависимости от выбранных положительных направлений токов и напряжений, а также нулевое значение, означающее отсутствие в уравнениях токов или напряжений тех или иных ветвей.

Общее число уравнений, составленных для множества сечений и контуров заданного графа, может быть намного больше

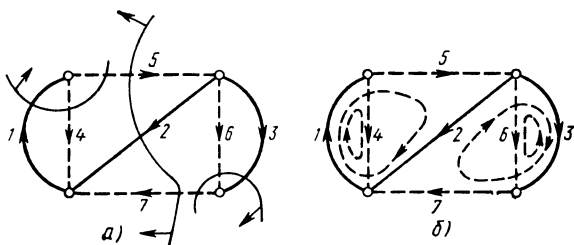


Рис 2.15

необходимого числа  $n_v$  уравнений. Это означает, что уравнения зависимы — часть из них является следствием остальных.

Из множества сечений и контуров графа цепи необходимо выбрать такие, которые дают линейно независимые системы уравнений, составленных по законам Кирхгофа. Их удобно вводить с помощью понятия дерева графа.

**Дерево** — система наименьшего числа ветвей, связывающих все узлы графа без образования контуров. Следовательно, дерево представляет связный подграф, который содержит все узлы графа и получается путем удаления всех ветвей, образующих контуры. Для заданного графа существует множество деревьев. На рис. 2.15 приведено одно из деревьев рассмотренного графа. Легко убедиться, что между любой парой узлов дерева имеется единственный путь. Построение дерева разбивает ветви графа на *ветви дерева* и ветви, не вошедшие в дерево, называемые *ветвями связи* или хордами. На рис. 2.15 ветви дерева нанесены сплошными линиями, а ветви связи — пунктирными.

Число ветвей дерева на единицу меньше числа узлов:

$$n_d = n_y - 1. \quad (2.24)$$

Это следует из того, что первая ветвь соединяет два узла, а каждая последующая один узел.

Число ветвей связи равно числу остальных ветвей, не вошедших в дерево:

$$n_x = n_v - n_d = n_v - n_y + 1. \quad (2.25)$$

Простые соотношения (2.24) и (2.25) имеют важнейшее значение в теории цепей. Первое из них определяет число независимых сечений, дающих независимые уравнения для токов ветвей, а второе — число независимых контуров, дающих независимые уравнения для напряжений ветвей.

Для получения линейно независимых сечений и контуров связанного графа сначала выбирают определенное дерево.

Каждой ветви дерева можно сопоставить единственное сечение, называемое *главным*, которое состоит из одной ветви дерева и нескольких ветвей связи. Следовательно, *каждое главное сечение включает одну ветвь дерева, которая не входит в другие сечения*. Поэтому уравнения равновесия токов в главных сечениях будут независимыми. Число главных сечений равно числу ветвей дерева.

На рис. 2.15, а для одного из выбранных деревьев с тремя ветвями показаны соответствующие им три главных сечения.

Каждой ветви связи можно приписать единственный контур, называемый *главным*, который состоит из одной ветви связи и нескольких ветвей дерева. *Каждый главный контур включает одну ветвь связи, которая не входит в другие контуры*. Поэтому уравнения равновесия напряжений в главных контурах будут независимыми. Число главных контуров, очевидно, равно числу ветвей связи.

На рис. 2.15, б показаны четыре главных контура, соответствующие выбранному дереву.

Для получения упорядоченной системы уравнений соединений и матрицы их коэффициентов удобно нумеровать ветви, присваивая первые  $n_d$  номеров ветвям дерева, а остальные номера от  $n_{d+1}$  до  $n_v$  — хордам.

Независимые уравнения равновесия токов записываются согласно (2.22) для каждого из  $n_d$  главных сечений, которым приписываются как номера, так и направления входящих ветвей дерева. Независимые уравнения равновесия напряжений записывают согласно (2.23) для каждого из  $n_x$  главных контуров, которым приписывают номера и направления образующих их хорд. Общее число линейно независимых уравнений соединений равно  $n_d + n_x = n_v$ , т. е. числу ветвей цепи. Уравнения соединений более или менее сложных цепей часто необходимо записывать в матричной форме, особенно при применении ЦВМ, вводя матрицы главных сечений и главных контуров.

*Матрица главных сечений*, которая описывает соединение ветвей, входящих в независимые сечения, представляет  $n_{вд} \times n_{в}$  матрицу,  $n_{вд}$  строк которой являются порядковыми номерами сечений, а  $n_{в}$  столбцов — номерами ветвей. Элементы матрицы равны: 1 — при совпадении и — 1 — при несовпадении направления ветви с выбранным положительным направлением сечения (по току ветви дерева) и 0, если ветвь не входит в сечение. Матрица сечений для главных сечений графа рис. 2.15, а записывается в виде

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Матрица  $\Omega$  показывает, какие ветви входят в каждое из главных сечений.

*Матрица главных контуров*, которая описывает соединение ветвей, входящих в независимые контуры, представляет  $n_{вс} \times n_{в}$  матрицу,  $n_{вс}$  строк которой являются порядковыми номерами контуров, а  $n_{в}$  столбцов — номерами ветвей. Элементы матрицы равны: 1 — при совпадении и — 1 — при несовпадении направления ветви с направлением обхода контура (по току ветви связи) и 0, если ветвь не входит в контур.

Контурная матрица для главных контуров графа рис. 2.15, б имеет вид

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Матрица  $B$  показывает, какие ветви входят в каждый из главных контуров.

Если ввести векторы (столбцовые матрицы) токов и напряжений ветвей:

$$i = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_{n_{в}} \end{bmatrix}; \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n_{в}} \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

то систему уравнений соединений можно записать в матричной форме:

$$\left. \begin{aligned} Qi &= 0; \\ Bu &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

Для цепи или ее графа, приведенных на рис. 2.13, используя полученные матрицы (2.26) и (2.27) главных сечений и контуров, можем записать уравнения соединений для токов

$$\mathbf{Q}\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

для напряжений

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Система из  $n_v$  уравнений соединений содержит  $n_v$  токов и  $n_v$  напряжений ветвей, т. е.  $2n_v$  переменных. Токи и напряжения ветвей связаны  $n_v$  уравнениями (2.19) и (2.20) элементов. Следовательно, общее число уравнений цепи, состоящих из уравнений элементов и уравнений соединений и содержащих  $2n_v$  токов и напряжений ветвей, равно  $2n_v$ .

Из уравнений соединений необходимо исключить  $n_v$  переменных, используя  $n_v$  уравнений элементов (2.19) и (2.20). В результате получим систему из  $n_v$  нелинейных функциональных уравнений. Для последующего решения этой системы желательно исключить по возможности наибольшее число переменных и привести ее к системе с минимальным числом уравнений, в пределе к одному уравнению с одним неизвестным. К сожалению, такое преобразование связано с большими трудностями и не всегда возможно.

Перейдем к рассмотрению примеров составления уравнений нелинейных резистивных цепей.

1. Составим уравнения равновесия простейшей параллельно-последовательной цепи (рис. 2.16, а), питаемой от источника тока  $i_0(t)$ .

Для получения уравнений с числовыми значениями коэффициентов необходимо задаться конкретными значениями параметров характеристик всех элементов. Примем вторую ветвь линейной, а остальные две ветви нелинейными. Пусть характеристики элементов имеют вид

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= 2u_1^{1/3}; \\ u_2 &= 5i_2; \\ u_3 &= i_3 + 0,5i_3^3 \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$



Граф цепи (рис. 2.16, б) имеет четыре ветви ( $n_v = 4$ ) и три узла ( $n_y = 3$ ). Число независимых узлов или сечений  $n_{nc} = 2$ , а число независимых контуров  $n_{нк} = 2$ . Для получения независимых уравнений соединений, связывающих переменные ветвей цепи, необходимо выбрать исходное дерево. С учетом вида элементов, а также форм задания характеристик резистивных элементов источник тока и ветвь 3 должны быть ветвями связи, а ветвь 2 — ветвью дерева. Приняв ветвь 1, соответствующую нелинейному элементу, за недостающую

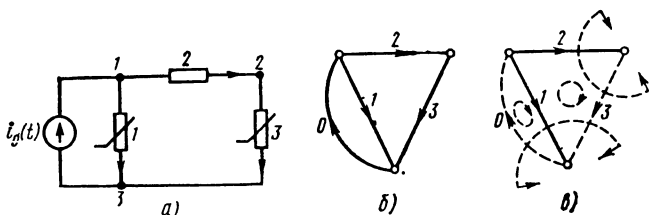


Рис. 2.16

ветвь дерева, получим нужные нам дерево графа и соответствующие ему главные сечения и контуры, которые показаны на рис. 2.16, в.

Уравнениями равновесия токов в сечениях 1 и 2 (по номерам ветвей дерева) будут

$$\left. \begin{aligned} -i_0 + i_1 + i_3 &= 0; \\ i_2 - i_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

а уравнениями равновесия напряжений в контурах 0 и 3 (по номерам ветвей связи)

$$\left. \begin{aligned} -u_0 + u_1 &= 0; \\ -u_1 + u_2 + u_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

Общее число переменных в уравнениях соединений равно 8 — удвоенному числу ветвей. Из них одна величина — ток источника — является заданной функцией времени. Из уравнений соединений срезу следует, что напряжение источника равно напряжению первого элемента, а ток второго элемента — току третьего элемента:

$$u_0 = u_1; \quad i_2 = i_3. \quad (2.33)$$

Из четырех уравнений соединений остаются два — первое и четвертое, которые содержат пять неизвестных. Если исключить из них три переменные, используя три уравнения

элементов (2.30), то получим систему двух уравнений с двумя неизвестными. В первую очередь исключим напряжение второго линейного элемента согласно (2.30) и (2.33)

$$u_2 = R_2 i_2 = R_2 i_3 = 5i_3. \quad (2.34)$$

Подставив в первое уравнение (2.31) и во второе (2.32) значения переменных из (2.30) и (2.34), получим

$$\left. \begin{aligned} 2u_1^{1/3} + i_3 &= i_0(t); \\ u_1 - 5i_3 - (i_3 + 0,5i_3^3) &= u_1 - 6i_3 - 0,5i_3^3 = 0. \end{aligned} \right\}$$

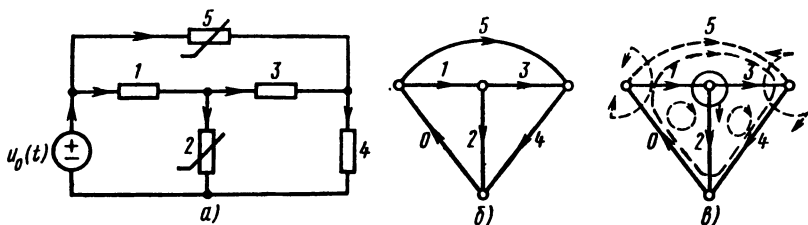


Рис. 2.17

Можно исключить напряжение первого элемента, определив его из второго уравнения. В результате получим одно уравнение относительно тока третьего элемента

$$2(6i_3 + 0,5i_3^3)^{1/3} + i_3 = i_0. \quad (2.35)$$

Если ток  $i_3$  найден из решения этого нелинейного уравнения, то остальные величины определяются последовательно из соответствующих уравнений без решения новых функциональных уравнений.

2. Составим уравнения равновесия более сложной нелинейной цепи, имеющей перекрытую Т-образную структуру. Цепь питается от источника напряжения  $u_0(t)$  (рис. 2.17, а).

Примем следующие характеристики элементов, заданные в виде приближенных аналитических выражений:

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= u_0(t); \\ u_1 &= R_1 i_1; \quad i_1 = G_1 u_1; \\ i_2 &= \varphi_2(u_2); \\ u_3 &= R_3 i_3; \quad i_3 = G_3 u_3; \\ u_4 &= R_4 i_4; \quad i_4 = G_4 u_4; \\ u_5 &= \varphi_5(i_5). \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

Граф цепи (рис. 2.17, б) имеет четыре узла и шесть ветвей; число независимых узлов или сечений  $n_{nc} = 3$ , а число независимых контуров  $n_{нк} = 3$ .

С учетом характеристик элементов выбрано дерево графа, показанное на рис. 2.17, в с обозначением соответствующих главных сечений и контуров.

Уравнениями равновесия токов в сечениях будут

$$\left. \begin{aligned} \underline{i_0} - \underline{i_1} & & - \underline{i_5} &= 0; \\ - \underline{i_1} + \underline{i_2} + \underline{i_3} & & &= 0; \\ & - \underline{i_3} + \underline{i_4} - \underline{i_5} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

а уравнениями равновесия напряжений в контурах —

$$\left. \begin{aligned} \underline{u_0} + \underline{u_1} + \underline{u_2} & & &= 0; \\ & - \underline{u_2} + \underline{u_3} + \underline{u_4} &= 0; \\ - \underline{u_0} & & + \underline{u_4} - \underline{u_5} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

Токи ветвей дерева и напряжения ветвей связи в полученных уравнениях подчеркнуты.

Из 12 переменных, входящих в уравнения соединений, одна величина — напряжение источника — является заданной функцией времени. В системе (2.37) исключим токи ветвей дерева, а в системе (2.38) — напряжения ветвей связи с помощью уравнений элементов (2.36), в результате получим

$$\left. \begin{aligned} \underline{i_0} - \underline{i_1} & & & - \underline{i_5} &= 0; \\ & - \underline{i_1} + \varphi_2(\underline{u_2}) + \underline{i_3} & & &= 0; \\ & & - \underline{i_3} + G_4 \underline{u_4} - \underline{i_5} &= 0; \\ \underline{u_0} + R_1 \underline{i_1} + \underline{u_2} & & & &= 0; \\ & - \underline{u_2} + R_3 \underline{i_3} + \underline{u_4} & & &= 0; \\ - \underline{u_0} & & + \underline{u_4} + \varphi_5(\underline{i_5}) &= 0; \end{aligned} \right\}$$

Система из шести уравнений содержит шесть неизвестных. Путем последовательного исключения переменных можно уменьшить число уравнений.

## § 2.6. Узловые уравнения нелинейных резистивных цепей

Во многих случаях, особенно при машинном формировании уравнений нелинейных резистивных цепей, интерес представляет система узловых уравнений, переменными в которых яв-

ляются напряжения  $n = n_y - 1$  узлов ( $n_y$  — общее число узлов) по отношению к базисному узлу:

$$u^y = [u_1^y \ u_2^y \dots u_n^y]^T. \quad (2.39)$$

В методе узловых уравнений предполагается, что цепь составлена из двухполюсных резистивных элементов, имеющих монотонные характеристики, а также немонотонные характеристики типа  $N$ , в виде однозначных функций напряжения и зависимых источников тока, управляемых напряжением (ИТУН). Если цепь содержит зависимые источники других типов, то их необходимо преобразовать в источники типа ИТУН.

При выборе в качестве переменных узловых напряжений уравнения соединений по законам Кирхгофа составляются: по закону токов — для  $n = n_y - 1$  независимых узлов и по закону напряжений — для всех  $n_b$  ветвей цепи.

Пусть введены векторы токов и напряжений ветвей (2.28) и независимая матрица соединений цепи  $A$ . Каждая строка матрицы соединений дает номера ветвей, входящих в узел. Поэтому уравнения равновесия токов в независимых узлах можно записать

$$Ai = 0. \quad (2.40)$$

Каждый столбец матрицы соединений дает номера пар узлов, между которыми включена ветвь цепи. Поэтому уравнения для напряжений ветвей  $u_k = u_i^y - u_j^y$ , записанных по закону Кирхгофа для напряжений, можно представить в виде

$$A^T u^y = u. \quad (2.41)$$

Запишем уравнения ветвей, приняв для общности каждую ветвь состоящей из параллельно соединенных независимого источника тока и резистивного элемента (рис. 2.18, а) или зависимого источника тока, управляемого напряжением какой-либо ветви (рис. 2.18, б).

Для составных ветвей:

первого вида

$$i_k = f_k(u_k) - i_{0k},$$

второго вида

$$i_k = f'_k(u_j) - i_{0k}.$$

Эти выражения можно записать в следующей матричной форме:

$$i = [f(u) - i_0], \quad (2.42)$$

где  $f = [f_1(u'), f_2(u'') \dots]^T$  — вектор функций  $f_k$  и  $f'_k$ .

Исключим из (2.40) вектор тока с помощью (2.42):

$$A f(u) = A i_0.$$

Подставив сюда значение вектора напряжения (2.41), получаем искомые узловые уравнения

$$A f(A^T u y) = A i_0. \quad (2.43)$$

Рассмотрим пример. На рис. 2.18, в изображена цепь с тремя независимыми узлами, состоящая из трех нелинейных эле-

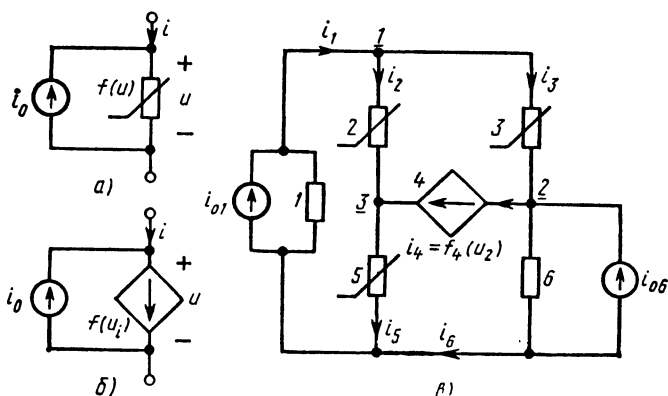


Рис. 2.18

ментов, одного ИТУН и двух независимых источников тока, шунтированных линейными проводимостями  $\hat{G}_1$  и  $G_6$ . Уравнения нелинейных элементов и ИТУН

$$\begin{aligned} i_2 &= f_2(u_2); \quad i_4 = f_4(u_4); \\ i_3 &= f_3(u_3); \quad i_5 = f_5(u_5). \end{aligned}$$

Выразим по закону Кирхгофа (ЗНК) напряжения ветвей:  $u_1 = u_1^y$ ;  $u_2 = u_1^y - u_3^y$ ;  $u_3 = u_1^y - u_2^y$ ;  $u_5 = u_3^y$ ;  $u_6 = u_2^y$ . Суммируя токи в узлах при учете записанных соотношений, получим для трех узлов

$$\begin{aligned} 1: & -\hat{G}_1 u_1^y + f_2(u_1^y - u_3^y) + f_3(u_1^y - u_2^y) = i_{01}; \\ 2: & -f_3(u_1^y - u_2^y) + f_4(u_1^y - u_3^y) + G_6 u_2^y = i_{06}; \\ 3: & -f_2(u_1^y - u_3^y) - f_4(u_1^y - u_3^y) - f_5(u_3^y) = 0. \end{aligned}$$

Эту же систему уравнений можно получить перемножением матриц согласно выражению (2.43), где

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{matrix},$$

$$f(u) = [G_1 u_1, f_2(u_2), f_3(u_3), f_4(u_4), f_5(u_5), G_6 u_6]^T.$$

## § 2.7. Численные методы решения функциональных уравнений

Как указывалось, приближенное решение системы нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений, которой описывается нелинейная резистивная цепь, может быть произведено численными методами. При этом все коэффициенты уравнений должны быть заданы численно и затем путем подстановок и преобразований приведены к одному уравнению с одним неизвестным или, если последнее невозможно, к минимальному числу уравнений.

Приближенное числовое решение функциональных уравнений производят в два приема. Сначала делают грубую оценку корней, а затем уточнение их значений на основе принятого уточняющего алгоритма до получения требуемой точности. Эти вычисления выполнимы, как правило, с помощью ЦВМ.

Грубую оценку решения можно выполнить различным образом. Для одного уравнения  $f(x) = 0$  удобно использовать графический метод. Для этого функцию  $f(x)$  разбивают на два слагаемых  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ , каждое из которых должно иметь по возможности простой график. Указанное разбиение, очевидно, всегда выполнимо, в крайнем случае, в качестве слагаемых можно принять  $f_1(x) = \varphi(x)$  и  $f_2(x) = -\varphi(x) + f(x)$ , где  $\varphi(x)$  — любая функция, которая может быть равна нулю, постоянной величине, линейной функции и т. п. Записав уравнение в виде  $f_1(x) = -f_2(x)$ , видим, что искомые решения являются точками пересечения графиков функций  $f_1(x)$  и  $-f_2(x)$ .

Существует несколько *методов уточнения* решений функциональных уравнений.

Рассмотрим *метод Ньютона—Рафсона* применительно к одному функциональному уравнению. Пусть  $x = x_h$  является приближенным значением корня функционального уравнения  $f(x) = 0$ . Для получения уточненного значения корня  $x_{h+1}$

следует ввести поправку  $h_k$ , так что  $x_{k+1} = x_k + h_k$ . Поправку можно найти из условия разложения в ряд Тейлора значения функции при  $x = x_k + h$  и сохранения в нем линейного приближения

$$f(x_{k+1}) = f(x_k + h_k) \approx f(x_k) + f'(x_k) h_k.$$

Приравняв это выражение нулю в предположении того, что уточненное значение корня  $x_{k+1}$  является истинным, найдем нужную поправку

$$h_k = -f(x_k)/f'(x_k). \quad (2.44)$$

Для вычисления поправки необходимо иметь выражения функции и ее производной. Уточненное значение корня на  $k$ -м шаге

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (2.45)$$

Расчет начинают с грубого приближения корня  $x_0$  ( $k=0$ ), для которого определяют поправку  $h_0$  из (2.44) и новое значение корня  $x_1$ . Далее расчет повторяют до тех пор, пока поправка не станет пренебрежимо малой.

Геометрически поправка  $h$  определяется заменой функции касательной.

На рис. 2.19, а для иллюстрации показана функция  $f(x)$ , пересечение которой с осью  $x$  представляет истинное значение корня. Грубое значение корня  $x_0$  дает  $f(x_0) > 0$ . Проведя касательную в точке  $f(x_0)$  до пересечения с осью  $x$ , получим поправку  $h_1$  и новое значение корня  $x_1$ . Повторение процесса на следующем шаге уточнения даст новое значение корня  $x_2$  и т. д.

Описанный процесс уточнения решения в зависимости от вида функции  $f(x)$  и выбора начального приближения может сходиться, т. е. давать искомое значение корня, или расходиться. Если исходное или начальное приближение выбрано достаточно близко к истинному значению корня, то численный процесс всегда сходится, и можно получить решение с любой точностью. При этом метод Ньютона—Рафсона обеспечивает более быструю сходимость, чем другие методы уточнения. В случае расхождения численного процесса следует задаваться

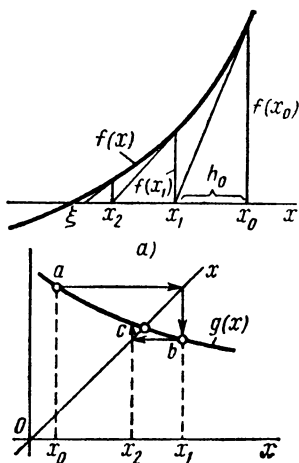


Рис. 2.19

новыми приближенными значениями корней и повторить процесс уточнения решений.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий метод Ньютона—Рафсона.

Задана цепь, состоящая из последовательного соединения двух нелинейных резистивных элементов, подключенных к источнику постоянного напряжения  $U = 1$  В. Вольт-амперные характеристики элементов представлены следующими выражениями:

$$\begin{aligned} u_1 &= i_1^{1/3}; \\ u_2 &= \text{sh } i_2. \end{aligned}$$

Требуется найти ток в цепи и напряжения на каждом из элементов.

Через оба элемента проходит один и тот же ток  $i = i_1 = i_2$ . Уравнение равновесия напряжений в цепи содержит одну неизвестную — ток:  $u_1 + u_2 = i^{1/3} + \text{sh } i - 1 = 0$ .

По приближенным графическим построениям двух функций  $\text{sh } i$  и  $i^{1/3}$  находим приближенное начальное значение корня, представляющее точку пересечения обоих графиков:  $i_0 \approx 0,3$ .

Запишем уравнение в виде

$$f(i) = i^{1/3} + \text{sh } i - 1 = 0.$$

Первая производная функции

$$f'(i) = \frac{1}{3} i^{-2/3} + \text{ch } i.$$

Подставив  $i_0 = 0,3$  в выражение функции и ее производной, имеем:

$$f(i_0) = 0,3^{1/3} + \text{sh } 0,3 - 1 = -0,0262;$$

$$f'(i_0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{0,3^2}} + \text{ch } 0,3 = 1,789.$$

Согласно (2.44) первая поправка

$$h_0 = 0,0262/1,789 = 0,0146.$$

Первое уточненное значение корня

$$i_{(1)} = i_0 + h_0 = 0,3 + 0,0146 \approx 0,315.$$

Новое значение корня

$$f(i_{(1)}) = 0,315 + \text{sh } 0,315 - 1 \approx 0.$$

Первое уточнение дает почти точное значение корня (для расчетов с точностью до третьего знака). Подставив найденный ток в выражения характеристик элементов, найдем напряжения на каждом элементе.

В соответствии с описанной процедурой последовательного уточнения решения функциональных уравнений по методу Ньютона—Рафсона может быть составлена программа для вычислений с помощью ЦВМ.



Рассмотрим метод Ньютона—Рафсона применительно к системе совместных функциональных уравнений. Примем для упрощения систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 0; \\ f_2(x_1, x_2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

Пусть  $x_1 = x_{1k}$  и  $x_2 = x_{2k}$  являются приближенными значениями корней на  $k$ -м шаге уточнения. Примем, что уточненные значения корней

$$\left. \begin{aligned} x_{1(k+1)} &= x_{1k} + h_{1k}; \\ x_{2(k+1)} &= x_{2k} + h_{2k}. \end{aligned} \right\} \quad (2.47)$$

обращают в нуль линейные приближения функций, которые на основе разложения в ряд Тейлора функций (2.46) запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_{1(k+1)}, x_{2(k+1)}) &\approx f_1(x_{1k}, x_{2k}) + \\ &+ h_{1k} \frac{\partial f_{1k}}{\partial x_1} + h_{2k} \frac{\partial f_{1k}}{\partial x_2} = 0; \\ f_2(x_{1(k+1)}, x_{2(k+1)}) &\approx f_2(x_{1k}, x_{2k}) + \\ &+ h_{1k} \frac{\partial f_{2k}}{\partial x_1} + h_{2k} \frac{\partial f_{2k}}{\partial x_2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

Здесь через  $f_{ik}$  и  $\partial f_{ik}/\partial x_i$  обозначены значения функций и их производных при  $x_1 = x_{1k}$  и  $x_2 = x_{2k}$ . Приведенный случай двух уравнений непосредственно обобщается на случай  $n$  уравнений.

Как видим, искомые поправки должны быть найдены из решения системы  $n$  линейных уравнений. Коэффициентами уравнений являются значения функций и частных производных при известных переменных в начале шага. Хотя имеются стандартные подпрограммы решения систем линейных уравнений, все же следует уменьшать число исходных функциональных уравнений путем исключения по возможности наибольшего числа переменных.

Перейдем к рассмотрению уточнения решения функциональных уравнений по методу итераций, более простому, но менее эффективному по сравнению с рассмотренным.

Уравнение  $f(x) = 0$  представляют в виде

$$x = g(x).$$

Затем в его правую часть подставляют приближенное значение корня  $x_0$  и полученную величину  $g(x_0) = x_1$  принимают за уточненное значение корня, которое снова подставляют в

$g(x)$ . Повторение этого процесса, который можно записать в виде алгоритма

$$x_{k+1} = g(x_k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

позволяет получить значение корня с любой точностью, если процесс сходится.

Условие сходимости итерации состоит в том, чтобы на интервале между точным и приближенным значениями корня производная  $g'(x)$  удовлетворяла условию

$$|g'(x)| < 1,$$

т. е. угол наклона касательной не должен превышать  $45^\circ$ . Если условие  $|g'(x)| < 1$  не выполняется, следует преобразовать исходное уравнение. В частности, можно перейти к обратной функции. Геометрическая иллюстрация приведена на рис. 2.18, б, где показан график функции  $g(x)$ , пересечение которого с прямой, проходящей через начало координат под углом  $45^\circ$ , дает точное значение корня. Приближенное значение корня  $x_0$  определяет точку  $a$  с ординатой, которая принимается за уточненное значение корня  $x_1$ . Проводим через точку  $a$  горизонтальный отрезок до пересечения с прямой  $y = x$ , а оттуда — вертикальный отрезок до точки  $b$ , абсцисса которой равна  $x_1$ , а ордината —  $g(x_1)$ . Последняя принимается за новое значение корня; далее таким же образом определяем точку  $c$  и т. д. Как видно, процесс итерации при  $|g'(x_0)| < 1$  в окрестности искомого корня будет сходиться. Легко убедиться, что при невыполнении этого условия процесс расходится.

Метод итераций легко обобщается на случай системы функциональных уравнений.

Пусть задана система двух уравнений с двумя переменными:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= f_1(x_1, x_2); \\ x_2 &= f_2(x_1, x_2). \end{aligned} \right\}$$

Если значения корней на  $k$ -м шаге уточнения равны  $x_{1k}$  и  $x_{2k}$ , то, подставив их в систему, получим итерационную формулу, дающую новые значения корней:

$$\left. \begin{aligned} x_{1(k+1)} &= f_1(x_{1k}, x_{2k}); \\ x_{2(k+1)} &= f_2(x_{1k}, x_{2k}). \end{aligned} \right\}$$

Изложенный здесь процесс предварительного определения решения и последующего его уточнения позволяет найти одну точку входной или передаточной характеристики для за-

данной величины входного сигнала, который принимается постоянным.

Для нахождения остальных точек необходимо задаваться другими значениями входного сигнала и решать новые функциональные уравнения. При этом для сложных цепей требуется большой объем вычислений, выполнимый практически только на ЦВМ.

Применение численного метода требует составления системы уравнений, описывающей заданную цепь в аналитической форме. Для этого, как указывалось, характеристики всех элементов, которые задаются графиками, должны быть представлены в аналитическом виде. При аппроксимации заданных графически характеристик всегда вносится погрешность. Чем проще вид аппроксимирующего аналитического выражения характеристики и, следовательно, исследуемых уравнений, тем больше будет погрешность.

Необходимость в приближенных характеристиках является недостатком численных, а также аналитических методов, если их применение возможно. Недостаток состоит также в том, что в результате расчетов нельзя получить качественные представления о влиянии отдельных элементов и их характеристик на поведение цепи в целом, что очень существенно при проектировании. Кроме того, численный метод не дает всех возможных решений в тех случаях, когда не существует единственного решения.

Преимуществом численного метода является его общность — метод применим для решения уравнений цепей любой конфигурации с любым числом источников, если удовлетворяется условие существования и единственности решения.

## **§ 2.8. Численный анализ по дискретным линеаризованным схемам**

Как показано в предыдущем параграфе, для определения с помощью алгоритма Ньютона—Рафсона уточненного значения корня  $x_{k+1}$  уравнения  $f(x) = 0$  функция  $f(x)$  разлагается в окрестности найденного значения  $x_k$  в ряд Тейлора. Приравнивание нулю только линейных членов разложения дает поправку, добавка которой к  $x_k$  позволяет найти  $x_{k+1}$ . Для применения алгоритма необходимо составить систему вида (2.2) функциональных уравнений, описывающих поведение цепи, в которой вольт-амперная характеристика каждого нелинейного элемента представлена приближенным аналитическим выражением в виде нелинейной алгебраической или трансцендентной функции.

Рассмотрим путь применения алгоритма Ньютона—Рафсона, основанный на дискретных линейризованных схемах замещения каждого нелинейного элемента. Эти схемы являются цепевым или схемным представлением алгоритма Ньютона—Рафсона на каждом шаге итерации.

Для получения дискретных схем следует представленную в аналитическом виде вольт-амперную характеристику  $i = \varphi(u)$  каждого нелинейного элемента в окрестности точки  $u_k$   $k$ -го приближения разложить в ряд Тейлора и, учтя только линейные члены, значение тока на  $(k+1)$ -м шаге  $i_{k+1} = \varphi(u_{k+1})$  представить

$$i_{k+1} = \varphi(u_k) + \left. \frac{d\varphi}{du} \right|_{u_k} (u_{k+1} - u_k) = (i_k - g_k u_k) + g_k u_{k+1} = \hat{i}_k + g_k u_{k+1}. \quad (2.49)$$

Первое слагаемое здесь определяется по данным  $i_k$  и  $u_k$ , найденным на предыдущем  $k$ -м шаге, и предварительно вычисленному значению производной от нелинейной характеристики элемента при  $u = u_k$ , имеющей размерность проводимости

$$g_k = \left. \frac{d\varphi(u)}{du} \right|_{u=u_k}; \quad (2.50)$$

$$\hat{i}_k = i_k - g_k u_k.$$

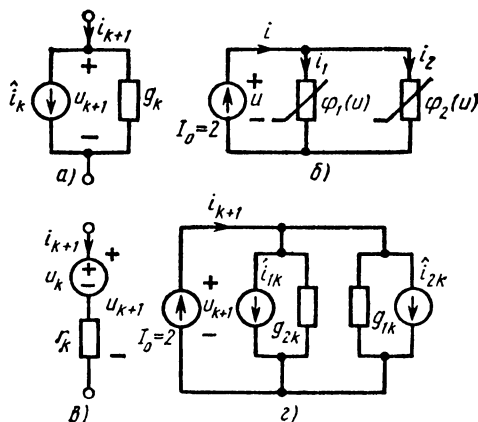


Рис. 2.20

Выражению (2.49) соответствует дискретная для  $(k+1)$ -го шага схема замещения, состоящая из двух параллельно соединенных ветвей (рис. 2.20, а):

- 1) линейного резистивного элемента с проводимостью  $g_k$ , определяемой известным решением на предыдущем шаге; ток через элемент пропорционален значению напряжения  $u_{k+1}$ ;
- 2) источника тока с током  $i_k - g_k u_k$ , определяемым по решению на  $k$ -м шаге.

Аналогичным образом можно получить дуальные схемы, рассматривая вольт-амперную характеристику нелинейного элемента  $u = \psi(i)$ . Представлению значения напряжения на

$(k + 1)$ -м шаге нелинейными членами ряда Тейлора

$$u_{k+1} = \psi(i_k) + \left. \frac{d\psi(i)}{di} \right|_{i_k} (i_{k+1} - i_k) = (u_k - r_k i_k) + r_k i_{k+1},$$

где  $u_k = \psi(i_k)$  — приближение на  $k$ -м шаге, соответствует последовательная дискретная схема для  $(k + 1)$ -го шага, показанная на рис. 2.20, в. Напряжение источника напряжения, равное  $u_k - r_k i_k$ , и сопротивление  $r_k = d\psi(i_k)/di$  определяются по данным вычислений на  $k$ -м шаге.

Дискретная линеаризованная схема нелинейной цепи составляется заменой каждого нелинейного резистивного элемента схемами, приведенными на рис. 2.20, а, в.

Параметры приведенных дискретных линеаризованных схем нелинейного резистивного элемента для вычисления переменных на  $(k + 1)$ -м шаге, как видно, определяются полностью значениями переменных на предыдущем  $k$ -м шаге. Из них более предпочтительна параллельная схема, применяемая при анализе по узловым уравнениям. Существенное преимущество этой линеаризованной на каждом шаге цепи состоит в легкости формирования с помощью ЦВМ узловых уравнений. Структура («топология») цепи остается неизменной на всех шагах итерации, изменяться будут только величины проводимостей и токов источников. При этом имеется возможность использования с некоторыми дополнениями хорошо разработанных программ анализа линейных цепей.

Рассмотрим пример. На рис. 2.20, б изображена цепь, состоящая из двух параллельно соединенных нелинейных сопротивлений и присоединенная к источнику постоянного тока с током  $I_0 = 2A$ . Вольт-амперные характеристики элементов выражаются так:

$$i_1 = u_1^3 = u^3; \quad i_2 = 2u^{0,5} = 2u^{0,5}.$$

Напряжения обоих резистивных элементов равны общему узловому напряжению  $u = u_1 = u_2$ . На рис. 2.20, г приведена дискретная линеаризованная схема замещения цепи, на которой оба нелинейных элемента на  $(k + 1)$ -м шаге итерации представлены дискретными моделями; проводимости и токи источников моделей согласно (2.50) равны

$$g_{1k} = \left. \frac{di_1}{du} \right|_{u_k} = 3u_k^2; \quad \widehat{i_{1k}} = i_{1k} - g_{1k} u_k = -2u_k^3;$$

$$g_{2k} = \left. \frac{di_2}{du} \right|_{u_k} = u_k^{-0,5}; \quad \widehat{i_{2k}} = i_{2k} - g_{2k} u_k = u_k^{0,5}.$$

Уравнение цепи относительно единственного узлового напряжения

$$(g_{1k} + g_{2k}) u_{(k+1)} = -\hat{i}_k - \hat{i}_{2k} + I_0.$$

Подставив значения величин, имеем

$$(3u_k^2 + u_k^{-0.5}) u_{(k+1)} = 2u_k^3 - u_k^{0.5} + 2.$$

Значение узлового напряжения на  $(k+1)$ -м шаге итерации

$$u_{(k+1)} = \frac{2u_k^3 - u_k^{0.5} + 2}{3u_k^2 + u_k^{-0.5}}. \quad (2.51)$$

Задавшись значением начального приближения ( $k=0$ ) узлового напряжения  $u_0 = 1$ , из (2.51) получаем на первом шаге итерации

$$u_1 = (2 - 1 + 2)/(3 + 1) = 0,75.$$

Подстановка этого значения в (2.51) дает для второго шага  $u_2 = 0,696$ .

Повторяя процесс итерации, для искомого узлового напряжения получим следующий последовательный ряд значений: 1,0; 0,75; 0,696; 0,694; 0,694. После  $k=4$  итераций практически достигается нужное решение.

В рассмотренном примере простой цепи с одним независимым узлом искомое узловое напряжение на  $(k+1)$ -м шаге представляется в виде явной зависимости от значения на предыдущем шаге. В случае же цепей с  $n$  независимыми узлами необходимо на каждом шаге определять значения  $n$  узловых напряжений из решения системы  $n$  линейных уравнений.

Рассмотрим приведенную на рис. 2.21, а П-образную цепь, состоящую из двух поперечных линейного (1) и нелинейного (2) элементов, присоединенных к узлам 1 и 2 с напряжениями  $u_1$  и  $u_2$ , и нелинейного продольного элемента (3) с напряжением  $u_3 = u_1 - u_2$ . Вольт-амперные характеристики элементов

$$i_1 = 2u_1; \quad i_2 = 3u_1^{1/3}; \quad i_3 = u_3^3.$$

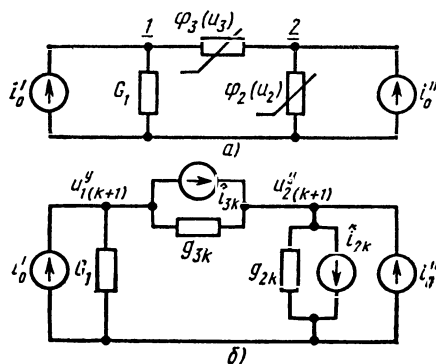


Рис. 2.21

Дискретная линеаризованная схема цепи, приведенная на рис. 2.21, б, содержит согласно (2.50) следующие параметры дискретных моделей нелинейных элементов:

$$g_{2k} = \left. \frac{di_2}{du_2} \right|_{u_{2k}} = u_{2k}^{-2/3}; \quad \widehat{i}_{2k} = i_{2k} - g_{2k} u_{2k} = 2u_{2k}^{1/3}.$$

$$g_{3k} = \left. \frac{di_3}{du_3} \right|_{u_{3k}} = 3u_{3k}^2; \quad \widehat{i}_{3k} = i_{3k} - g_{3k} u_{3k} = -2u_{3k}^3.$$

Узловые уравнения цепи ( $u_3 = u_1 - u_2$ )

$$\begin{aligned} [G_1 + 3(u_{1k} - u_{2k})^2] u_{1(k+1)} - 3(u_{1k} - u_{2k})^2 u_{2(k+1)} = \\ = i_0' + 2(u_{1k} - u_{2k})^3; \\ -3(u_{1k} - u_{2k})^2 u_{1(k+1)} + [u_{2k}^{-2/3} + 3(u_{1k} - u_{2k})^2] u_{2(k+1)} = \\ = i_0'' - 2u_{2k}^{1/3} - 2(u_{1k} - u_{2k})^3. \end{aligned}$$

Решение начинается с начальной оценки ( $k = 0$ ) значений  $u_{10}$  и  $u_{20}$ ; подстановка их в уравнения после решения системы дает значения  $u_{11}$  и  $u_{21}$ , которые снова вводятся в уравнения, и т. д. Система линейных уравнений на каждом шаге итерации решается по стандартной программе алгоритма Гаусса.

В заключение отметим, не приводя доказательства, что анализ цепи по линеаризованным дискретным схемам дает тот же результат, что и анализ с применением алгоритма Ньютона—Рафсона непосредственно к системе нелинейных функциональных уравнений цепи.

## § 2.9. Определение рабочих точек нелинейных элементов

Одной из важнейших практических задач анализа нелинейных резистивных цепей является определение рабочих точек или точек смещения нелинейных электронных приборов. Точки смещения определяют при действии только постоянных напряжений и токов источников смещения или питания. Схему для определения смещений получают из общей схемы путем исключения реактивных элементов — при коротком замыкании всех индуктивностей и размыкании всех емкостей. В результате получается нелинейная резистивная цепь с источниками постоянного напряжения и тока.

Если в нелинейной резистивной цепи действуют только источники постоянного напряжения и тока, то напряжения и токи на всех элементах цепи будут также постоянными. Пусть

передаточная характеристика резистивной цепи относительно элемента, смещение в котором нас интересует, определена в виде некоторой функции (рис. 2.22, а):

$$f_2 = f_2(f_1).$$

При действии источника постоянного напряжения (тока)  $f_1 = E$  напряжение (ток) элемента на выходе также будет постоянным и равным

$$f_2 = f_2(E).$$

На графике рис. 2.22, а значению  $f_1 = E$  будет соответствовать точка а с постоянным напряжением (током)  $f_2 = U_2$ .

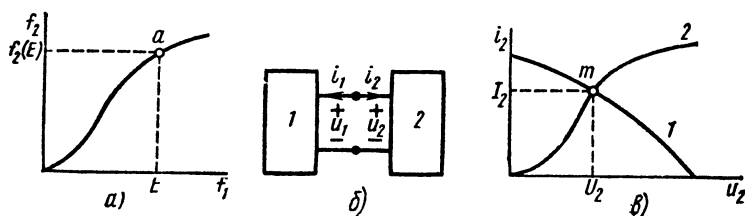


Рис. 2.22

Значение постоянного напряжения и тока нелинейного элемента в резистивной цепи с источниками постоянных сигналов, изображаемого в виде точки на характеристике, называется рабочей точкой или точкой смещения. Определение рабочих точек, или точек смещения, нелинейных элементов имеет очень важное практическое значение для расчета различных электронных схем. Работа электронного прибора в нужном режиме в случае приложения переменных сигналов определяется правильным выбором рабочих точек, или точек смещения.

Основной режим при действии переменного сигнала, для которого используется нелинейный элемент, происходит в области характеристики, прилегающей к рабочей точке. Рабочую точку, или точку смещения, электронных приборов следует выбирать таким образом, чтобы обеспечивалась работа на участках характеристики, наиболее выгодных для режима, в котором предполагается работа схемы. Для линейных усилителей, например, точку смещения нужно выбрать так, чтобы при изменении сигнала между максимальными положительными и отрицательными значениями работа происходила на линейном участке характеристики с наибольшей крутизной, обеспечивающей максимальное усиление. Часто применяются



схемы, в которых электронные приборы работают в ключевом режиме, когда падение напряжения на приборе в открытом состоянии должно быть небольшим. При этом мощность управляющего сигнала должна быть минимальной. Смещение приборов, предназначенных для работы в ключевом режиме, должно обеспечивать выполнение указанных условий.

Для определения рабочих точек, или точек смещения, т. е. для анализа режима по постоянному току, нет необходимости находить входную или передаточную характеристику всей цепи. Иначе говоря, не обязательно составлять и решать систему функциональных уравнений, описывающих поведение всей цепи. Значительно проще можно получить результат разбиением цепи на две части: первая часть включает нелинейный элемент, в котором нужно найти смещение, а вторая — всю остальную часть цепи (рис. 2.22, б). Графиком или уравнением входной характеристики для первой части цепи будет заданная вольт-амперная характеристика элемента. График или уравнение входной характеристики для второй части можно получить с помощью методов, изложенных выше. Уравнения входных характеристик обеих частей для указанных на рис. 2.22, б положительных направлений напряжений и токов можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= i_1(u_1) \quad \text{или} \quad f_1(u_1, i_1) = 0; \\ i_2 &= i_2(u_2) \quad \text{или} \quad f_2(u_2, i_2) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.52)$$

В месте соединения обеих частей цепи имеем

$$u_2 = u_1; \quad i_2 = -i_1. \quad (2.53)$$

С помощью этих соотношений можно из (2.52) исключить две переменные. С точки зрения графического метода удобно исключать переменные, входящие в функцию с более простым графиком. Если более простой график имеет функция  $f_1$ , то следует исключить переменные  $u_1$  и  $i_1$ . При этом уравнения (2.52) преобразуются в систему уравнений с двумя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} f_1(u_2, -i_2) &= 0; \\ f_2(u_2, i_2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

Решив эту систему, получим значения переменных  $u_2 = U_2$ ,  $i_2 = I_2$  и согласно (2.53) искомые смещения  $U_1 = U_2$  и  $I_1 = -I_2$ . Каждое из уравнений (2.54), связывающих две переменные, можно представить в виде графика в системе координат  $u_2 - i_2$  (рис. 2.22, в). Первый график для  $f_1$  будет представлять вольт-амперную характеристику элемента 1,

отображенную относительно оси абсцисс, вследствие обращения знака тока, второй график для  $f_2$  — входную характеристику остальной части цепи, которая в общем случае может быть немонотонной. Точка пересечения графиков принадлежит обоим характеристикам и удовлетворяет обоим уравнениям (2.54). Следовательно, они представляют решения рассматриваемой системы уравнений, т. е. являются искомыми рабочими точками.

Из приведенных построений по нахождению рабочих точек (см. рис. 2.22, в) можно сделать вывод, что в случае монотонных входных характеристик обеих частей резистивных цепей возможна только одна точка пересечения или рабочая точка. Следовательно, для монотонных характеристик решение уравнений резистивной цепи постоянного тока единственно. В случае же немонотонной характеристики одного из элементов или обоих элементов возможно несколько точек пересечения или рабочих точек. Это означает, что решение уравнений резистивных цепей может быть не единственным.

Как отмечалось, графическое определение рабочих точек имеет то преимущество, что расчеты производятся с первичными исходными данными — графиками характеристик, а не с их аналитическими приближениями. В связи с этим рабочие точки определяют обычно графическим методом. Из приведенного изложения следует, что расчеты при использовании графического метода основаны на разобранном ранее графическом определении входной характеристики участков цепи.

Рассмотрим примеры по определению рабочих точек простых схем.

1. На рис. 2.23, а показана цепь смещения нелинейного элемента — туннельного диода, состоящая из источника постоянного напряжения  $E$ , включенного последовательно с линейным резистором  $R$ . Вольт-амперная характеристика нелинейной цепи  $i_1 = i_1(u_1)$  показана на рис. 2.23, б (график 1). Вольт-амперную характеристику остальной части цепи, состоящей из линейного резистора  $R$  и источника напряжения  $E$ ,

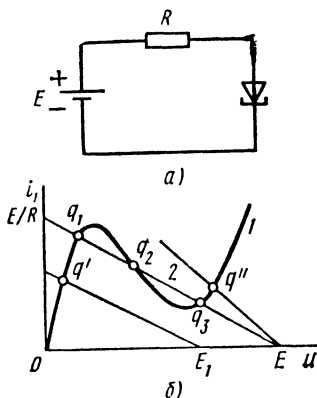


Рис 2.23

легко записать сразу через переменные  $i_1$  и  $u_1$ :

$$u_1 = E - Ri_1; \quad i = \frac{E}{R} - \frac{u_1}{R}. \quad (2.55)$$

Эта характеристика представляет уравнение прямой (график 2) с угловым коэффициентом  $k = -1/R$ , которая пересекает ось ординат в точке  $(0; E/R)$ , а ось абсцисс — в точке  $(E; 0)$ . Как видно из графика, в зависимости от положения прямой можно получить либо одну рабочую точку — точки  $q'$  или  $q''$ , либо три точки —  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$ .

Положение на плоскости прямой, изображающей характеристику ветви с источником, можно изменять путем регулирования величин либо напряжения  $E$ , либо сопротивления  $R$ . При изменении напряжения  $E$  и постоянстве сопротивления  $R$  угловой коэффициент не изменяется, происходит лишь смещение прямой вправо при увеличении  $E$  и влево — при уменьшении  $E$ . Чрезмерное увеличение напряжения источника нежелательно, так как это увеличивает потери в схеме и мощность источника питания. При изменении сопротивления  $R$  и постоянстве напряжения  $E$  точка  $(E; 0)$  пересечения прямой с осью абсцисс остается на месте, а точка  $(0; E/R)$  пересечения прямой с осью ординат будет снижаться при увеличении сопротивления  $R$  и повышаться при его уменьшении. Следовательно, крутизна наклона прямой будет возрастать при уменьшении сопротивления.

Какую из точек равновесия выбрать в качестве рабочей, зависит от назначения схемы и требуемого режима.

2. На рис. 2.24, а приведены цепи смещения трехполюсного резистивного элемента в виде  $n$ - $p$ - $n$ -транзистора, включенного по схеме с общим эмиттером. Здесь необходимо устанавливать рабочие точки во входном контуре (цепи базы) и выходном (коллекторном) контуре с помощью двух источников постоянного напряжения  $E_1$  и  $E_2$ , включенных последовательно с резисторами  $R_1$  и  $R_2$ .

На рис. 2.24, б изображены выходные характеристики  $i_2 = f_2(u_2, i_1)$  и характеристика цепи смещения  $i_2 = (E_2 - u_2)/R_2$ . Пересечение указанных характеристик при определенном выбранном токе входа (базы) даст рабочую точку выходной цепи.

На рис. 2.24, в показаны входная характеристика элемента  $i_1 = f_1(u_1, u_2)$  и характеристика цепи смещения в виде прямой  $i_1 = (E_1 - u_1)/R_1$ . Пересечение этих характеристик при известном напряжении на выходе (между коллектором и эмиттером) даст рабочую точку входного контура.

С практической точки зрения неудобно иметь два отдельных источника напряжения смещения. Поэтому напряжение смещения входа получают с помощью делителя напряжения из резисторов  $R_a$  и  $R_b$ , подключенного к источнику напряжения смещения на коллекторе (рис. 2.24, з). Со стороны входного контура делитель с источником напряжения  $E_K$  эквивалентен источнику с напряжением  $E_K R_b / (R_a + R_b)$  и внутренним сопротивлением  $R_a R_b / (R_a + R_b)$ , получающимся при

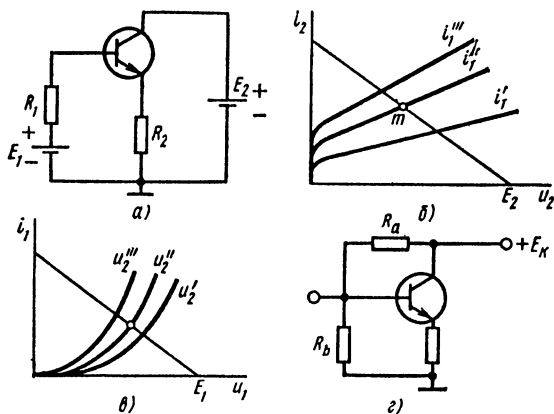


Рис. 2.24

параллельном соединении сопротивлений плеч делителя. Данный вывод получается на основе применения теоремы об эквивалентном источнике напряжения.

## § 2.10. Преобразование спектров сигналов нелинейной цепью

Одним из важнейших свойств нелинейной цепи является преобразование спектрального состава входного сигнала. Оно заключается в том, что при действии на входе гармонического или периодического сигнала, состоящего из суммы нескольких синусоид различных частот, реакция (ток или напряжение любой ветви) будет содержать не только гармоники сигнала воздействия, но также новые гармоники, которых нет во входном сигнале. При этом частоты новых синусоидальных составляющих могут быть как кратными, так и не кратными основной частоте периодического сигнала воздействия.

Указанное свойство преобразования спектра входного сигнала принципиально невозможно в линейных цепях с постоян-

ными параметрами — ток и напряжение любой ветви такой цепи не могут иметь гармоник, не содержащихся в периодическом сигнале воздействия.

Пусть задана нелинейная резистивная цепь с передаточной или входной характеристикой, заданной в виде степенного полинома. Для устранения излишних индексов примем в качестве реакции ток, а в качестве входного сигнала — напряжение и запишем характеристику в виде

$$i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_n u^n.$$

Рассмотрим сначала действие на входе гармонического сигнала

$$u = U \cos (\omega t + \alpha_u).$$

В соответствии с выражением характеристики (2.54) функцию (2.55) необходимо возвести в степени и просуммировать. Согласно формулам тригонометрии степени гармонических функций можно заменить функциями кратных частот. Для  $k = 2, 3$  имеем:

$$u^2 = U^2 \cos^2 (\omega t + \alpha_u) = \frac{U^2}{2} + \frac{U^2}{2} \cos 2 (\omega t + \alpha_u);$$

$$u^3 = U^3 \cos^3 (\omega t + \alpha_u) = \frac{U^3}{4} \cos (\omega t + \alpha_u) + \frac{3U^3}{4} \cos 3 (\omega t + \alpha_u).$$

Как видно, гармоническая функция степени  $n$  эквивалентна сумме гармонических функций кратных частот, т. е. тригонометрическому полиному — четной степени соответствует сумма четных гармоник, включая нулевую, нечетной степени — сумма нечетных гармоник. Наибольшая частота гармоник, равная  $n\omega$ , определяется старшей степенью полинома характеристики.

Если в (2.54) степени гармонической функции (2.55) заменить суммами гармоник и сгруппировать гармоники одинаковых частот, то получим выражение искомой реакции в виде тригонометрического полинома степени  $n$ .

$$i = I_0 + \sum_{k=1}^n I_k \cos k (\omega t - \alpha_u). \quad (2.56)$$

Реакция (ток или напряжение любой ветви) нелинейной резистивной цепи при действии гармонического сигнала является несинусоидальной периодической функцией, состоящей из суммы гармоник до  $n$ -й включительно, где  $n$  — старшая степень полинома, представляющего характеристику.

Из выражения (2.56) следует, что при полиномиальном задании характеристики выходная периодическая реакция при

действию на входе гармонического сигнала автоматически представляется в виде тригонометрического полинома — суммы гармонических функций кратных частот.

Рассмотрим действие сигнала, состоящего из суммы двух гармонических функций с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ :

$$u = u_1 + u_2 = U_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + U_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2). \quad (2.57)$$

Реакция цепи состоит из суммы степеней двучленов

$$i = a_0 + a_1(u_1 + u_2) + \dots + a_n(u_1 + u_2)^n. \quad (2.58)$$

Степени двучленов при  $k = 2, 3$ :

$$(u_1 + u_2)^2 = u_1^2 + 2u_1 u_2 + u_2^2;$$

$$(u_1 + u_2)^3 = u_1^3 + 3u_1^2 u_2 + 3u_1 u_2^2 + u_2^3.$$

В отличие от действия одного сигнала при действии сигнала в виде суммы двух функций получают дополнительные слагаемые, равные произведениям составляющих в различных степенях вида  $u_1 u_2$ ;  $u_1^2 u_2$ ;  $u_1 u_2^2$  или в общем случае биномиальные члены  $u_1^{n-m} u_2^m$  ( $m = 1, 2, \dots, n$ ).

Как было установлено, степени гармонических функций дают суммы гармоник — синусоид кратных частот.

Произведения двух гармонических функций или в общем случае двух тригонометрических полиномов дают гармонические функции, частоты которых равны разностям или суммам двух частот. В справедливости данного положения можно убедиться из рассмотрения двух типичных формул произведений гармонических функций с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ :

$$\begin{aligned} u_1 u_2 &= U_1 U_2 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \cos(\omega_2 t + \alpha_2) = \\ &= \frac{U_1 U_2}{2} \{ \cos |(\omega_1 - \omega_2) t + (\alpha_1 - \alpha_2)| + \cos [(\omega_1 + \omega_2) t + (\alpha_1 + \alpha_2)] \}; \\ u_1 u_2^2 &= U_1 U_2^2 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \cos^2(\omega_2 t + \alpha_2) = \\ &= \frac{U_1 U_2^2}{2} \left\{ \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \frac{1}{2} \cos [(\omega_1 - 2\omega_2) t + (\alpha_1 - 2\alpha_2)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cos [(\omega_1 + 2\omega_2) t + (\alpha_1 + 2\alpha_2)] \right\}. \end{aligned}$$

Частоты гармонических функций в правых частях выражений равны разностям и суммам частот, кратных  $\omega_1$  и  $\omega_2$ :  $\omega_1 \pm \omega_2$ ;  $2\omega_1 \pm \omega_2$ ;  $\omega_1 \pm 2\omega_2$  или в общем случае

$$\omega_{mn} = m\omega_1 \pm n\omega_2, \quad (2.59)$$

где  $m, n = 1, 2, \dots$  — определяются степенями функций с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

Гармонические колебания с частотами  $\omega_{mn}$ , определяемыми разностью или суммой частот, кратных частотам действующих на входе синусоид, называют комбинационными колебаниями. Сумму абсолютных значений целых чисел  $m$  и  $n$ , задающих кратность слагаемых частот, называют порядком комбинационных колебаний.

Результирующая реакция при воздействии на нелинейную цепь сигнала в виде суммы двух гармонических колебаний

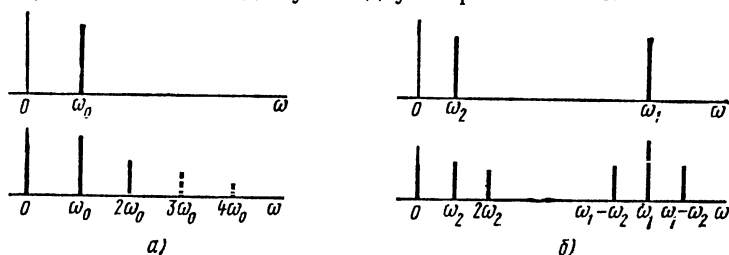


Рис. 2.25

будет состоять из гармонических функций кратных частот (до  $n$ -й гармоники) и комбинационных колебаний до  $n$ -го порядка.

В общем случае разностная и суммарная частоты  $\omega_{mn}$  не будут кратными частотам  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , так что выходная реакция не будет периодической функцией. Такие колебания называют почти периодическими. Только тогда, когда частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  кратны, выходная реакция будет периодической функцией.

Рассмотрим в качестве простейшего примера спектральный состав выходного колебания в цепи, характеристика которой задана полиномом второго порядка. Если на входе цепи действует одно косинусоидальное колебание с частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $U$ , то, положив в (2.56)  $n = 2$  и используя выражения кратных дуг, получим

$$\begin{aligned}
 i &= a_0 + a_1 U \cos(\omega_0 t + \alpha) + a_2 U^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha) = \\
 &= (a_0 + a_2 U^2/2) + a_1 U \cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{a_2}{2} U^2 \cos 2(\omega_0 t + \alpha). \quad (2.60)
 \end{aligned}$$

Выходная реакция содержит гармоники с частотами  $0$ ,  $\omega_0$  и  $2\omega_0$ . Амплитуды гармоник существенно зависят от коэффициентов  $a_k$  характеристики. Начальная фаза гармоник равна начальной фазе входного сигнала, умноженной на номер гармоники. На рис. 2.25, а изображены линии дискретного амплитудного спектра для сигнала с одной частотой. Повышение

степени  $n$  привело бы к появлению линий новых гармоник более высоких частот (показаны пунктиром).

Если на входе цепи действует сумма двух косинусоидальных колебаний с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , то, подставив (2.57) в (2.54), после преобразований тригонометрических выражений получим

$$\begin{aligned} i = & a_0 + \frac{a_2}{2} U_1^2 + \frac{a_2}{2} U_2^2 + a_1 U_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \\ & + a_2 U_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) + \frac{a_2}{2} U_1^2 \cos 2(\omega_1 t + \alpha_1) + \\ & + \frac{a_2}{2} U_2^2 \cos 2(\omega_2 t + \alpha_2) + a_2 U_1 U_2 \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + (\alpha_1 + \alpha_2)] + \\ & + a_2 U_1 U_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + (\alpha_1 - \alpha_2)]. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Здесь первые две строки содержат гармоники номеров 0, 1 и 2 двух колебаний с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , а остальные — комбинационные колебания с частотами  $\omega_1 \pm \omega_2$ . Начальные фазы комбинационных колебаний равны  $\alpha_1 \pm \alpha_2$ , т. е. выражаются таким же образом, как и их частоты. Амплитуды гармоник и комбинационных колебаний определяются значениями коэффициентов характеристики. На рис. 2.25, б изображены линии дискретного амплитудного спектра для сигнала с двумя частотами.

Рассмотренное преобразование спектров колебаний нелинейной цепью широко используется в различных устройствах.

## ГЛАВА 3

### ПРИМЕНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

#### § 3.1. Общие замечания

Нелинейные цепи и системы находят исключительно широкое применение в электротехнике, радиоэлектронике и других областях техники. Это объясняется большим разнообразием характеристик существующих нелинейных элементов (особенно резистивных), а также возможностью получения новых характеристик путем комбинации простых элементов. С помощью элементов, имеющих различные нелинейные характеристики, можно получить целый ряд эффектов, которые лежат в основе работы самых различных блоков, выполняющих разнообразные функции. Взаимодействие таких блоков, соеди-



ненных соответствующим образом, обеспечивает функционирование любых сложных устройств современной радиоэлектроники.

В данной главе рассмотрены некоторые примеры наиболее известных применений резистивных цепей. Более точно указанные цепи можно назвать *квазирезистивными*, так как реальные цепи всегда содержат малые паразитные параметры, которыми можно пренебречь. Паразитные параметры могут оказывать влияние на форму напряжений и токов, особенно в интервалах быстрых изменений реакций. При рассмотрении примеров будем интересоваться в основном *принципом работы нелинейного устройства*, использующего ту или иную форму характеристики; анализ различных вариантов схем и выбор оптимального из них, а также вопросы проектирования не будут затрагиваться, так как они составляют содержание специальных дисциплин. Приложения нелинейных цепей имеют для нас значение в первую очередь с точки зрения иллюстрации положений теории нелинейных цепей.

Большое число устройств, использующих нелинейные резистивные цепи, предназначается для *преобразования формы действующего на входе сигнала*, в частности синусоидального, в другую форму — периодическую или аperiodическую. Как видно из предыдущей главы, нелинейная характеристика всегда приводит к искажению формы входного сигнала.

Если характеристика резистивной цепи задана, то форму реакции цепи на известное воздействие легко найти с помощью графических построений, приведенных на рис. 2.2 и 2.3. При проектировании устройства, предназначенного для преобразования формы сигналов, ставится иная задача: по *заданной форме сигнала на входе и требуемой выходной реакции необходимо найти характеристику*, которая затем должна быть реализована с помощью подходящего элемента или комбинации элементов. Нахождение нужной характеристики  $\varphi(f_1)$ , связывающей входной сигнал  $f_1(t)$  и выходную реакцию  $f_2(t)$ :

$$f_2(t) = \varphi[f_1(t)],$$

означает исключение времени из двух заданных функций и получение зависимости  $f_2 = \varphi(f_1)$ . Операцию исключения времени проще всего выполнить с помощью графических построений, аналогичных приведенным на рис. 2.2 или 2.3. Следует лишь изменить порядок построений: найти точки пересечения ординат  $f_{1i}$  и  $f_{2i}$  графиков обеих функций времени для выбранных моментов времени  $t_i$ . Построенный по этим точкам график и будет представлять желательную характеристику. Понятие о реализации входной характеристики дано в § 1.7.

На рис. 3.1 показано графическое определение передаточной характеристики цепи, преобразующей синусоидальный сигнал в симметричные трапецеидальные колебания.

При рассмотрении применений резистивных цепей, преобразующих форму сигнала, сначала определяются требуемые характеристики для обоснования существующих схемных решений. Такой подход имеет важное значение для проектирования новых устройств преобразования формы сигналов. В дополнение к § 1.7 придется также столкнуться с задачей реализации най-

денной передаточной характеристики с помощью лестничных цепей. В большинстве простых случаев реализацию можно осуществить делителем напряжения, если речь идет о передаточной характеристике напряжений, или делителем тока, если требуется реализовать передаточную характери-

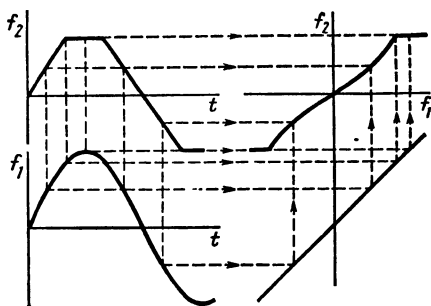


Рис. 3.1

стику токов. Так как конфигурация цепи известна, необходимо по заданной передаточной характеристике найти вольт-амперные характеристики обоих резисторов — плеч делителя. Ход решения этой задачи показан на конкретном примере в § 3.3.

## § 3.2. Выпрямление переменного тока

Назначение выпрямительных схем состоит в выполнении следующего преобразования: при действии на входе переменного напряжения (обычно синусоидальной формы) *ток* в резистивном нагрузочном элементе должен протекать лишь в *одном направлении*, в виде только положительных (или только отрицательных) полуволн, повторяющих форму полупериодов входного сигнала.

Рассмотрим сначала *однополупериодное выпрямление*. На рис. 3.2 изображены графики входного синусоидального напряжения и тока нагрузки, который состоит из полупериодов синусоиды, соответствующих только положительным полуволнам  $f_1(t)$ . Для получения точки характеристики задаемся временем  $t_i$ , определяем соответствующие ординаты кривых  $f_{1i}$  и  $f_{2i}$  и проектируем эти величины на координатную

систему  $f_1—f_2$ . В результате получается вогнутая характеристика, состоящая из двух линейных участков с точкой излома в начале координат; первый участок совпадает с отрицательной полуосью  $u$ , а второй линейно нарастает под углом  $\psi$ .

Найденная входная характеристика реализуется в соответствии с § 1.7 цепью из идеального диода и нагрузочного резистора. На рис. 3.3, а

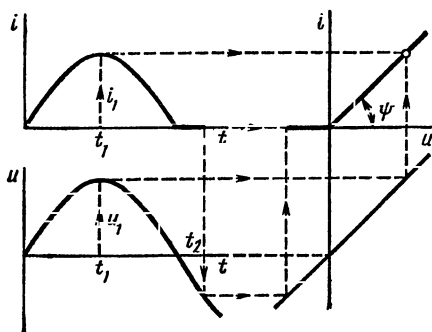


Рис. 3.2

представлена схема однополупериодного выпрямления. Падение напряжения на реальном диоде в прямом направлении может быть учтено присоединением линейного резистора последовательно с нагрузочным резистором. Влияние сопротивления этого резистора сводится к понижению напряжения на нагрузке по сравнению с напряжением источника. Обратный ток у электронных и газоразрядных диодов отсутствует. Обратным током полупроводниковых диодов в обычных схемах выпрямления пренебре-

гают. Построения, приведенные на рис. 3.2, очевидно, можно рассматривать в обратном порядке: считая заданной характеристику известной схемы из диода и резистора, по графику действующего сигнала определяем ток в нагрузке. Работу простых схем выпрямления можно объяснить также, рассматривая диоды как идеальные ключи, которые мгновенно замыкаются, когда напряжение анода (вывода  $p$ -области) превышает напряжение катода (вывода  $n$ -области), и мгновенно размыкаются в обратном случае.

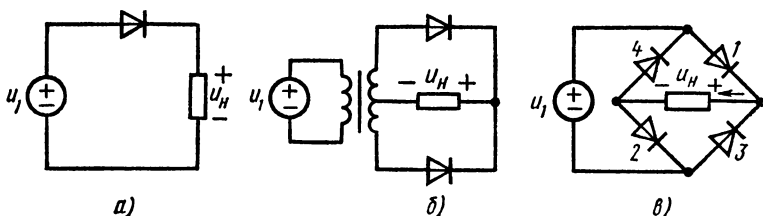


Рис. 3.3

гают. Построения, приведенные на рис. 3.2, очевидно, можно рассматривать в обратном порядке: считая заданной характеристику известной схемы из диода и резистора, по графику действующего сигнала определяем ток в нагрузке. Работу простых схем выпрямления можно объяснить также, рассматривая диоды как идеальные ключи, которые мгновенно замыкаются, когда напряжение анода (вывода  $p$ -области) превышает напряжение катода (вывода  $n$ -области), и мгновенно размыкаются в обратном случае.

Преобразование формы входного сигнала в выпрямительной схеме приводит, как и в любой нелинейной цепи, к преобразованию спектра — вместо одной гармоники входного сигнала ток в цепи и напряжение на нагрузке содержат гармоники всех частот. Для выпрямления наибольший интерес представляет нулевая гармоника тока, т. е. постоянная составляющая или среднее за период значение, которое равно  $I_0 = I_m/\pi$ . В чисто резистивной выпрямительной схеме получаются большие пульсации выходного напряжения на нагрузке, вызываемые гармониками переменной составляющей. Для уменьшения пульсаций необходимо применять сглаживающие фильтры нижних частот, которые состоят из  $L$ - $C$ - или  $R$ - $C$ -элементов. Но при этом цепь в целом уже не является резистивной. Поэтому здесь не будем рассматривать сглаживание пульсаций.

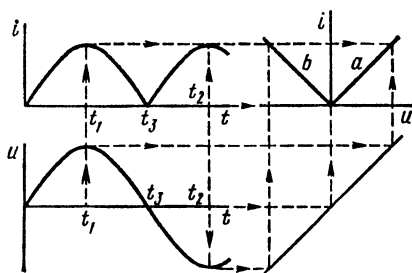


Рис. 3.4 \*

Перейдем теперь к *двухполупериодному выпрямлению*. На рис. 3.4 изображены графики входного синусоидального напряжения и тока нагрузки, который в пределах периода содержит два полупериода одного направления. С помощью построений, выполненных аналогично рис. 3.2, получаем характеристику, состоящую из двух ветвей  $a$  и  $b$  и представляющую сумму двух характеристик: обычной однополупериодной схемы выпрямления (ветвь  $a$ ) и однополупериодной схемы с обратной полярностью источника (ветвь  $b$ ). Схема будет состоять из указанных двух схем выпрямления, соединенных параллельно нагрузке (рис. 3.3, б). Для получения двух источников напряжения встречной полярности использован трансформатор с выведенной средней точкой вторичной обмотки.

Более просто можно представить работу данной схемы, так же рассматривая диоды как ключи.

Часто применяется *мостовая двухполупериодная* схема выпрямления (рис. 3.3, в). Плечи моста образуются четырьмя диодами: параллельно диагонали с нагрузочным резистором включены две ветви, состоящие каждая из последовательно соединенных и одинаково направленных двух диодов. В другую диагональ моста включен источник переменного напряжения. Применение трансформатора здесь необязательно.

Легко убедиться, рассматривая диоды как ключи, что в положительный полупериод напряжения источника включены диоды 1 и 2, обеспечивающие протекание тока через нагрузку в направлении стрелки. В отрицательный полупериод включены диоды 3 и 4, которые обеспечивают протекание тока через нагрузку в том же направлении. Постоянная составляющая или среднее за период значение тока при двухполупериодном выпрямлении равно  $I_0 = 2I_m/\pi$ . Следует иметь в виду, что в схемах выпрямления положительная полярность выходного постоянного (точнее выпрямленного) напряжения соответствует катоду и выводу  $n$ -области диода с  $p$ - $n$ -переходом.

### § 3.3. Схемы ограничения

Для ряда практических целей, в частности для формирования из синусоидальных сигналов колебаний трапецеидальной или прямоугольной формы той же частоты, требуются схемы ограничения. Схемы ограничения при действии на входе переменных сигналов дают на выходе напряжения, мгновенные значения которых не превышают некоторого заданного постоянного уровня  $E_{\max}$  или не снижаются ниже заданного уровня  $E_{\min}$ . Следовательно, ординаты кривой выходного напряжения должны удовлетворять двум условиям: ограничения «сверху»

$$u_2(t) = \begin{cases} u_1(t) & u_1(t) \leq E_{\max}; \\ E_{\max} & u_1(t) > E_{\max}; \end{cases} \quad (3.1)$$

ограничения «снизу»

$$u_2(t) = \begin{cases} u_1(t) & u_1(t) \geq E_{\min}; \\ E_{\min} & u_1(t) < E_{\min}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Можно для общности полагать, что имеются одновременно оба вида ограничения. Для исключения одного из них, например ограничения «сверху», достаточно принять  $E_{\max} > u_{1\max}$ ; при  $E_{\min} < u_{1\min}$  будет отсутствовать ограничение снизу; здесь  $u_{1\max}$  и  $u_{1\min}$  обозначают соответственно наибольшие и наименьшие значения ординат кривой входного напряжения.

Найдем форму передаточной характеристики схемы ограничения с помощью уже известных приемов графических построений. В качестве действующего на входе сигнала снова примем синусоидальное напряжение (рис. 3.5). Если амплитуду синусоидального сигнала принять превышающей  $E_{\max}$



необходима для ограничения тока в цепи: если напряжение на входе превысит  $E_{\max}$  или станет меньше  $-E_{\min}$ , то ток будет неограниченным. Поэтому последовательно с элементом 2 необходимо включить ограничительный резистор  $R_1$ , который может быть линейным. Величина его сопротивления должна быть выбрана по максимально допустимому току в схеме при наибольшем значении напряжения источника. Слишком большое значение сопротивления  $R_1$  уменьшает выходное напряжение

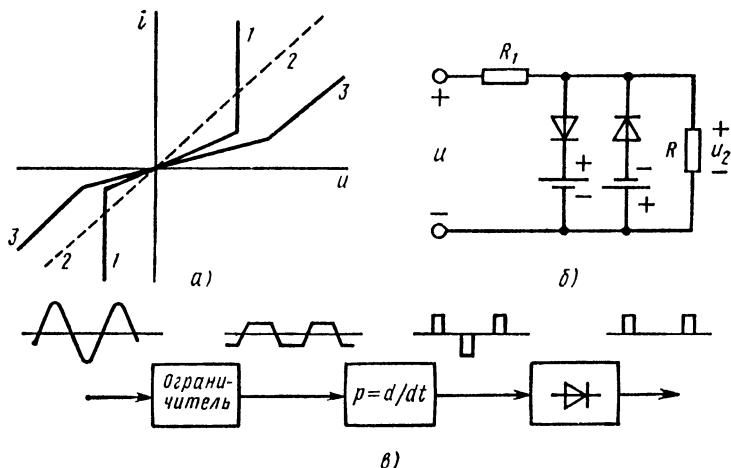


Рис. 3.6

на линейных участках передаточной характеристики и поэтому нежелательно. Просуммировав абсциссы линейной характеристики этого элемента (кривая 2) и элемента 2, получим результирующую характеристику цепи (кривая 3). Заданная передаточная характеристика и представляет зависимость абсцисс кривой 1 от абсцисс кривой 3, соответствующих одним и тем же значениям тока.

На рис. 3.6, б приведена диодная схема ограничения. Вместо диодов иногда применяют триоды или транзисторы: роль диода выполняет переход база—эмиттер или промежуток сетка—катод на входе. Применение указанных приборов обеспечивает одновременно усиление ограниченных схемой сигналов.

На рис. 3.6, в показана структурная схема формирования из синусоидальных сигналов последовательности коротких прямоугольных импульсов, период следования которых в точности равен периоду входного сигнала. Двусторонний ограни-

читель дает на выходе трапецеидальные колебания, дифференцирование преобразует их в последовательность прямоугольных импульсов, а диод пропускает к выходу только положительные импульсы. Формы сигналов изображены у выходов всех элементов.

### § 3.4. Стабилизация постоянного напряжения

На практике часто возникает необходимость поддержания постоянства напряжения на нагрузке, питаемой от реального источника постоянного напряжения, например от источника выпрямленного напряжения со сглаживающим фильтром. Колебание напряжения может происходить из-за непостоянства нагрузки, вызывающего изменение падения напряжения во внутреннем сопротивлении источника, а также вследствие колебания напряжения сети.

Система стабилизации должна обеспечить *сохранение постоянства напряжения на нагрузке при колебаниях напряжения сети, а также тока нагрузки в некоторых заданных пределах*. Указанная независимость величины реакции от изменения величины входного сигнала достижима только с помощью нелинейной цепи — в линейных цепях величины реакции и воздействия пропорциональны друг другу.

Стабилизацию напряжения можно осуществить с помощью простейшей схемы резистивного делителя (рис. 3.7, а). Эту схему можно получить, исходя из требуемой передаточной характеристики аналогично схеме ограничения. Для краткости примем цепь известной: первое плечо делителя образуется линейным резистором  $\bar{R}_1$ , а второе — нелинейным резистивным элементом. Параллельно ему включен нагрузочный резистор  $R_n$ , который примем также линейным.

В качестве нелинейного элемента необходимо выбрать элемент, характеристика которого имеет достаточно широкий, мало зависящий от напряжения линейный участок с минимальным динамическим сопротивлением. К таким элементам относится *стабилитрон*, характеристика которого приведена на рис. 3.7, б (кривая 1). Там же изображена линейная характеристика 2 нагрузочной ветви. Результирующая характеристика, полученная суммированием ординат, показана на рис. 3.7, в (кривая 2). Прямая 1 представляет характеристику источника с сопротивлением  $\bar{R}_1$ , определяемую уравнением  $i = (E - u)/\bar{R}_1$ . Пересечение характеристик 1 и 2 дает рабочую точку  $m$ , которая определяет режим цепи, в частности напряжение на нагрузке  $u_n$ . При изменении напряжения источника его характеристика будет перемещаться параллельно се-



бе. Из графиков и перемещения рабочей точки видно, что напряжение на нагрузке изменяется очень незначительно. Если бы нарастающий участок характеристики стабилитрона располагался вертикально ( $r_d = 0$ ), то напряжение на нагрузке не изменялось бы и стабилизация была бы идеальной. Предельные положения прямых, нанесенные пунктиром, соответствуют минимально и максимально допустимым значениям

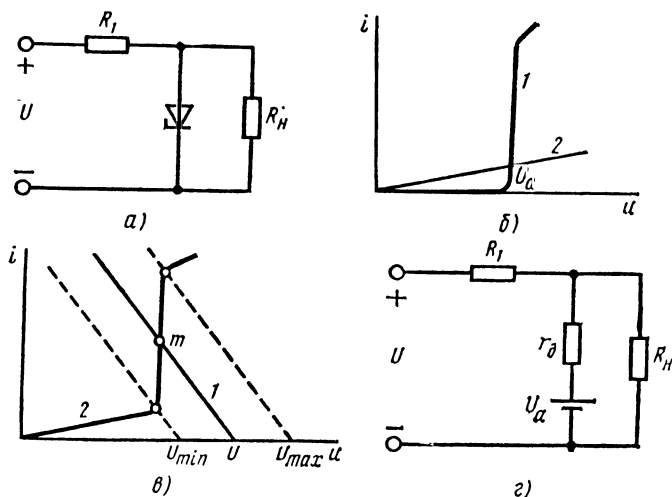


Рис. 3.7

напряжения источника  $U_{min}$  и  $U_{max}$ . Первое из них определяется током нагрузки, а второе — максимально допустимым током стабилитрона. Как видим, изменение напряжения источника компенсируется падением напряжения на резисторе  $R_1$ .

Наименьшее падение напряжения должно иметь место при  $U_{min}$  и нулевом токе нелинейного элемента

$$\Delta U_{min} = U_{min} - u_n = R_1 i_n.$$

Наибольшее падение напряжения должно быть при  $U_{max}$  и максимально допустимом токе нелинейного элемента

$$\Delta U_{max} = U_{max} + u_n = R_1 (i_n + I_{2max}).$$

Из приведенных соотношений можно определить величину сопротивления последовательного резистора схемы:

$$R_1 = \frac{U_{max} - U_{min}}{I_{2max}} = \frac{\Delta U}{I_{2max}}, \quad (3.3)$$

где  $\Delta U = U_{\max} - U_{\min} = \Delta U_{\max} - \Delta U_{\min}$  — амплитуда колебания напряжения источника, на которую рассчитывается схема стабилизации.

Максимальное падение напряжения на последовательном резисторе с учетом значения его сопротивления

$$\Delta U_{\max} = U_{\max} - u_n = \Delta U (1 + i_n / I_{2\max}) \quad (3.4)$$

определяется колебанием напряжения источника и отношением тока нагрузки к предельно допустимому току стабилизатора.

Для расчета рассматриваемой схемы стабилизации можно использовать кусочно-линейный метод. Вольт-амперную характеристику естественно представить состоящей из двух линейных участков — горизонтального, совпадающего с осью  $u$  и означающего разрыв при  $0 < u < U_a$ , и круто нарастающего при  $u > U_a$ , уравнение которого можно записать в виде

$$u = U_a + r_d i,$$

где  $r_d$  — динамическое сопротивление нарастающего рабочего участка.

На рис. 3.7, з приведена кусочно-линейная схема замещения рабочего участка. Для определения выходного напряжения на нагрузочном сопротивлении преобразуем источники напряжения в эквивалентные источники тока. Из полученной схемы имеем

$$U_2 = \left( \frac{1}{R_1} U + \frac{1}{r_d} U_a \right) / \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_n} + \frac{1}{r_d} \right).$$

Обычно  $R_n \gg r_d$ . При выполнении этого условия

$$U_2 = (1 + R_1 / r_d)^{-1} U + (1 + r_d / R_1)^{-1} U_a.$$

Найдем выражение для *коэффициента стабилизации*, под которым понимают отношение относительного изменения напряжения на входе к относительному изменению выходного напряжения:

$$K_{\text{ст}} = \frac{\Delta U / U}{\Delta U_2 / U_2} \approx \frac{U_2}{U} \cdot \frac{dU}{dU_2} = (1 + R_1 / r_d) \cdot U_2 / U. \quad (3.5)$$

Коэффициент стабилизации определяется в основном соотношением между величинами сопротивления последовательного резистора и динамического сопротивления стабилизатора и составляет обычно несколько десятков. Последнее означает, что относительное изменение напряжения на нагрузке будет в несколько десятков раз меньше изменения напряжения источника.

### § 3.5. Схемы преобразования спектров

В любой схеме с нелинейным элементом происходит изменение спектра входного сигнала — появляются новые частоты, которых не было в исходном сигнале. Рассмотрим устройства, в которых преобразование спектров производится преднамеренно для выполнения определенной задачи, а не является сопутствующим явлением. Действие устройства основано на преобразовании спектров сигналов нелинейной цепью (см. § 2.10).

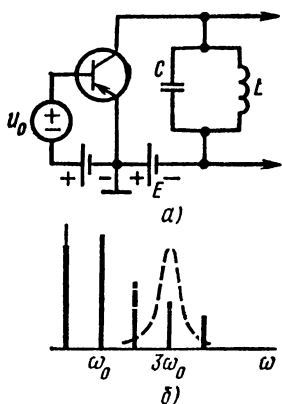


Рис. 3.8

**Умножение частоты.** Умножение частоты заключается в *выделении на выходе цепи синусоидального колебания, частота которого в  $n$  раз ( $n$  — целое число) превышает частоту действующего на входе синусоидального сигнала*. Резистивный умножитель частоты должен состоять из нелинейного элемента, характеристика которого позволяет иметь на выходе  $n$ -ю гармонику достаточной интенсивности и узкополосный фильтр для выделения этой гармоники. В качестве нелинейного элемента выбирают обычно триод или транзистор, так как эти элементы поз-

зволяют одновременно усилить выделяемую гармонику. Фильтром может служить простейший параллельный резонансный контур.

На рис. 3.8, *а* показана схема умножителя на транзисторе, на вход которого подается колебание большой амплитуды. Следует учитывать, что  $LC$ -контур выполняет только роль фильтра и не влияет на работу нелинейной части схемы. Коэффициент умножения составляет 2—4. Больший коэффициент умножения частоты получают каскадным соединением нескольких умножителей. На рис. 3.8, *б* изображено выделение нужной частоты из спектра частот.

**Амплитудная модуляция.** Амплитудная модуляция представляет процесс *изменения амплитуды синусоидального сигнала  $u_0(t)$  по заданному закону*, определяемому другим сигналом  $A(t)$  меньшей частоты. Модуляцию можно получить перемножением двух функций

$$u(t) = A(t) u_0(t) = A(t) \cos \omega_0 t, \quad (3.6)$$

т. е. в результате нелинейной операции, которая может быть выполнена только нелинейной цепью или цепью с переменными параметрами.

Рассмотрим получение модуляции с помощью нелинейной цепи. В § 2.10 было показано, что произведение двух напряжений можно получить, если их сумма действует на резистивную цепь с квадратичной вольт-амперной или передаточной характеристикой, когда реакция пропорциональна:

$$K [A(t) + u_0(t)]^2 = K [A^2(t) + 2A(t)u_0(t) + u_0^2(t)]. \quad (3.7)$$

В простейшем случае модуляции синусоидальным сигналом одной частоты  $\Omega$  ( $\Omega \ll \omega_0$ ):

$$A(t) = U(1 + m \cos \Omega t)$$

(где  $m < 1$  — коэффициент модуляции) спектр модулированного сигнала состоит из линий трех частот (рис. 3.9, а):  $\omega_0$

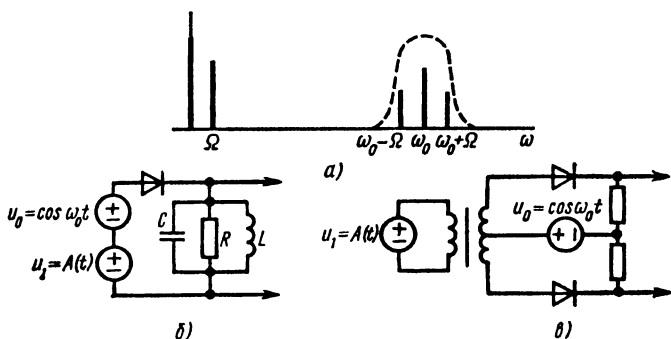


Рис. 3.9

(несущей) и  $\omega_0 \pm \Omega$  (боковых). Если модуляция производится сигналом, состоящим из ряда гармоник, то спектр будет содержать линии с несущей частотой  $\omega_0$  и линий верхних и нижних боковых частот, лежащих в полосе  $\omega_0 \pm \Omega_m$ , где  $\Omega_m$  — частота старшей гармоники.

Для получения модулированных сигналов необходимо последовательно соединенные источник напряжения с несущей частотой (обычно выход высокочастотного генератора) и источник модулирующего сигнала, представляющий собой источник полезной информации, подключить к входу нелинейной цепи. Эту цепь (рис. 3.9, б) в случае маломощных устройств составляют из полупроводникового или электровакуумного диода, соединенного последовательно с линейным резистором, имеющим небольшое сопротивление, с которого и снимается выходной сигнал. Результирующая характеристика цепи на рабочем участке должна быть по возможности квадратичной.

Для подавления частот, соответствующих первому и третьему слагаемым в (3.7), которые согласно § 2.10 содержат частоты 0;  $2\Omega$  и  $2\omega_0$ , применяется в качестве узкополосного фильтра параллельный резонансный контур.

Характеристики реальных модуляторов не являются строго квадратичными, а содержат и другие степени, которые дают вблизи несущей комбинационные частоты вида  $\omega \pm \nu\Omega$  ( $\nu = 2, 3, \dots$ ). От этих частот, искажающих процесс модуляции, трудно избавиться с помощью фильтра. Поэтому часто используют *двухтактную* или *балансную схему* модулятора, составленную из двух одинаковых частей (рис. 3.9, в). Модулирующее колебание подается на вход трансформатора, вторичная обмотка которого имеет вывод средней точки. Источник колебаний несущей частоты подключен между средней точкой обмотки трансформатора и средней точкой, образованной двумя нагрузочными резисторами. Выходное напряжение равно разности напряжений на резисторах нагрузки каждой половины схемы. Поэтому некоторые нежелательные комбинационные частоты компенсируют друг друга и не появляются на выходе. Кроме того, подавляется также несущая частота. Часто требуется избавление от несущей частоты, которая не содержит информации. Последняя, заключенная в боковых частотах, и выделяется с помощью параллельного резонансного контура на нагрузке в виде линий с частотами  $\omega_0 \pm \Omega$ .

### § 3.6. Электронные ключи

В различных системах управления и вычислительной техники очень широко применяются *управляемые электронные ключи*, выполняемые на нелинейных резистивных элементах. Электронные ключи служат для коммутации тока в цепи — включения, отключения и переключения ее отдельных участков, производимых под действием управляющих сигналов. Управляющий сигнал обычно имеет вид последовательности прямоугольных импульсов.

По отношению к ключу схему, в которой он используется, можно представлять состоящей из источника напряжения  $U$  с внутренним сопротивлением  $R$  и нагрузочного сопротивления  $R_n$ . В этой схеме ключ может присоединяться либо последовательно нагрузке (рис. 3.10, а), либо параллельно (рис. 3.10, в).

Ключ в зависимости от управляющего сигнала может находиться в положении *включено* или *отключено*. В случае идеального двустороннего ключа *напряжение при включенном положении равно нулю и характеристика представляется вер-*

тикальным отрезком на оси тока (рис. 3.10, б) между значениями  $\pm I_m = \pm U/(R + R_{\text{н}})$  (для последовательной схемы). При отключенном положении ток равен нулю и характеристика будет представляться горизонтальным отрезком на оси напряжения (рис. 3.10, г) между значениями  $\pm U_m$ . Время перехода из одного положения в другое принимается равным нулю. У реальных ключей, построенных на диодах и транзисторах, напряжение во включенном положении хотя и мало, но отлично от нуля; также ток в отключенном положении не

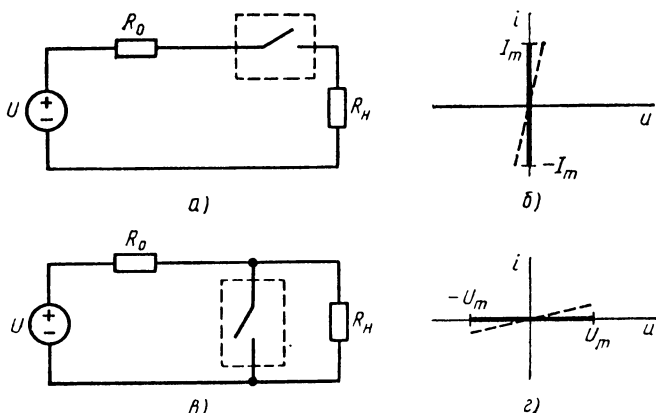


Рис. 3.10

равен нулю. Время переключения получается хотя и малым, но не равным нулю. На рис. 3.10, б, г соответствующие характеристики показаны пунктирными линиями. В случае часто применяемых на практике электронных ключей с односторонней проводимостью характеристики ключей в положениях включено и отключено также будут односторонними: на рис. 3.10, б не будет ветви ниже оси  $u$  и на рис. 3.10, г — ветви левее оси  $i$ .

В настоящее время промышленностью серийно выпускаются электронные ключи в виде *модулей на интегральных микросхемах*.

Рассмотрим кратко схемы простейших двухполюсных ключей.

**Диодный ключ.** На рис. 3.11, а показана схема диодного ключа, состоящая из полупроводникового диода и источника управляющего напряжения  $u_y(t)$ , смещающего характеристику диода. Управляющее напряжение имеет форму прямоугольных импульсов. При наличии импульсного напряжения

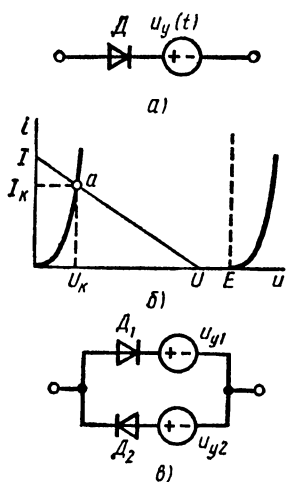


Рис. 3.11

характеристика диода смещена вправо на величину  $E$  (рис. 3.11, б); если напряжение, приложенное к цепи с ключом, меньше  $E$ , то имеем непроводящее состояние ключа — ток в цепи равен нулю.

В паузах между импульсами управляющего напряжения равно нулю, характеристика диода возвращается в исходное состояние, и для всех значений приложенного напряжения  $u > 0$  ключ замкнут.

На рис. 3.11, б отрезок прямой представляет характеристику источника напряжения и последовательно соединенного с ключом сопротивления. Точка  $a$  пересечения прямой с характеристикой диода дает значения тока и малого падения напряжения на ключе.

Недостаток диодных ключей состоит в том, что в течение всего периода отключенного состояния амплитуда управляющего напряжения  $E$  должна превышать амплитуду переключаемого напряжения.

**Транзисторный ключ.** На рис. 3.12, а, б показана схема ключа на  $n-p-n$ -транзисторе, включенном по схеме с общим эмиттером. Управление производится от источника управляющего напряжения в виде импульса прямоугольной формы, включенного между эмиттером и базой через резистор  $R_б$ .

На рис. 3.12, в приведены: 1) выходные характеристики транзистора — зависимости коллекторного тока от напряжения между коллектором и эмиттером при различных значениях

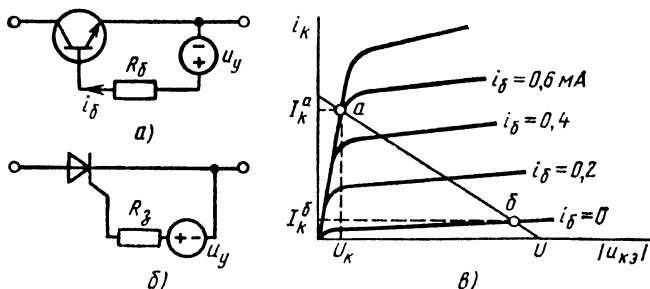


Рис. 3.12

ниях тока базы и 2) характеристика в виде прямой внешнего источника напряжения  $U$  и сопротивления, включенного последовательно с ключом.

Положению «включено» ключа соответствует точка  $a$  пересечения характеристик в области насыщения транзистора с малым падением напряжения  $U_{\kappa}$ . Для получения этого режима насыщения амплитуда управляющего напряжения должна быть достаточной, чтобы иметь нужную величину тока базы  $i_b = u_y/R_6$ .

Положению «отключено» соответствует точка пересечения на самой нижней ветви коллекторной характеристики с очень малым током. Здесь ток базы и управляющее напряжение равны нулю — имеем режим отсечки.

Переключение транзисторного ключа связано с быстрыми скачкообразными переходами от режима отсечки (точка  $b$ ) к режиму насыщения (точка  $a$ ) и обратно — транзистор работает в нелинейном режиме.

Амплитуда управляющего напряжения значительно меньше переключаемого напряжения, что является преимуществом. Недостаток же транзисторного ключа состоит в том, что длительность управляющего импульса должна быть равна времени включенного состояния.

**Тиристорный ключ.** На рис. 3.12, *в* показана схема тиристорного ключа. Основным элементом его является тиристор, который управляется током, текущим через управляющий электрод — затвор. Этот ток получается от источника управляющего импульсного напряжения, включенного последовательно с резистором  $R_3$ . В соответствии с характеристиками тиристора (см. рис. 1.15) чем меньше напряжение на аноде, тем больше должен быть управляющий ток. Непроводящему состоянию тиристора соответствует нижний горизонтальный участок характеристики с очень малым током. Проводящему состоянию тиристора, наступающему после приложения управляющего тока, соответствует вертикальный участок с малым напряжением, почти не зависящим от тока в анодной цепи. В таком состоянии тиристор находится и после снятия управляющего тока. Для восстановления запирающих свойств тиристора необходимо уменьшить анодный ток до значения, меньшего  $I_{\min}$  (удерживающего тока).

Тиристорными ключами можно коммутировать очень большие мощности, причем для управления требуется относительно небольшая мощность. К тому же в проводящем состоянии управляющий ток может быть снят.

Приведенные схемы ключей являются *односторонними* — протекание тока в них возможно только в одном направлении.



Такие ключи применяются тогда, когда напряжения и токи в цепи являются однополярными или имеют одно направление. Для изменения направления тока на обратное, очевидно, достаточно поменять местами выводы ключа.

В случае переменных токов в переключаемой цепи необходимо иметь *двусторонние* ключи, способные пропускать ток в двух направлениях. Двусторонние ключи можно получить параллельным включением двух односторонних ключей со встреч-

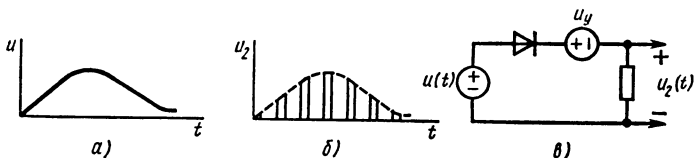


Рис. 3.13

ными направлениями токов. На рис. 3.11, в показана схема диодного двустороннего ключа. На практике часто применяют мостовые схемы двусторонних ключей.

Из большого числа примеров практического использования ключевых схем остановимся кратко на принципах работы схемы преобразования непрерывных сигналов в дискретные.

**Преобразование непрерывных сигналов в дискретные.** При обработке информации с помощью ЦВМ возникает необходимость преобразования непрерывных сигналов в дискретную форму. На рис. 3.13, а представлен сигнал в непрерывной или аналоговой форме. Суть преобразования в дискретную форму состоит в том, что из непрерывной функции отсекаются отстоящие на равных интервалах узкие импульсы одинаковой малой длительности, амплитуды которых равны ординатам кривой, как показано на рис. 3.13, б.

Схема простейшего последовательного дискретизатора с диодным ключом показана на рис. 3.13, в, где  $u(t)$  — источник напряжения непрерывного сигнала на входе,  $u_y$  — источник управляющего напряжения в виде последовательности прямоугольных импульсов, амплитуда которых превышает амплитуду входного сигнала. Ключ замыкается в моменты, когда управляющий импульс равен нулю; при этом на выходе на нагрузочном резисторе появляются импульсы, равные соответствующим ординатам входного сигнала. Если входной сигнал является переменным, то необходимо иметь двусторонний диодный ключ.

### § 3.7. Логические схемы

В вычислительной технике, различных устройствах обработки информации, во многих системах управления, связи и т. д. применяется цифровая техника, роль и место которой непрерывно растут. Соответственно значительная часть электронных устройств предназначается для обработки и преобразования информации в цифровой форме.

Цифровая техника работает в *бинарном режиме* с сигналами двух видов: 1) *ступенчатого напряжения* (потенциальный сигнал) двух уровней — высокого, которому приписывается информационное значение 1, и низкого, которому приписывается значение 0; 2) *прямоугольного импульса*, наличию и отсутствию которого приписывают соответственно информационные значения 1 и 0. Точное значение амплитуды сигнала не играет существенной роли — допустимы ее колебания в довольно больших пределах — порядка 25 % для высокого уровня ( $\sim 4$  В) и до 100 % — для низкого уровня ( $\sim 0,2$  В).

Бинарный режим получается адекватным, т. е. соответствует режиму электронных ключей, например, транзистора: при отключенном положении (отсечке) имеем высокий уровень, а при включенном (насыщении) — низкий уровень. Следовательно, *цифровая цепь строится из нелинейных элементов и является нелинейной цепью.*

Входные  $x_i$  и выходные  $y_i$  сигналы логических схем могут иметь определенные сочетания значений 1 и 0. Назначение логической схемы состоит в выполнении предписанного *преобразования*  $y = F(x_1, x_2, \dots, x_m)$  над входными сигналами: выходные сигналы должны иметь заданные сочетания значений 1 и 0 при определенных сочетаниях входных сигналов.

Главными элементами логических схем являются *ключи*, управляемые входными сигналами. В качестве ключей применяются перечисленные выше нелинейные резистивные двух- или трехполюсные элементы. Следовательно, логические схемы являются переключаемыми (ключевыми) схемами.

Рассмотрим принцип работы трех основных логических схем, с помощью которых можно построить сложные схемы, выполняющие любые логические функции. К ним относятся: 1) логическая схема И (схема совпадения или логического умножения); 2) логическая схема ИЛИ (схема логического сложения); 3) логическая схема НЕ (схема инверсии или отрицания). Приведем простейшие схемы с диодными и транзисторными ключами, которые реализуют указанные логические функции.

На рис. 3.14 показана логическая схема И на диодах и транзисторах с непосредственной связью. Для простоты показаны только два входа. *Сигнал на выходе появляется только при одновременном действии всех входных сигналов*: все транзисторы замкнуты или все диоды разомкнуты и напряжения появляются на выходе. При отсутствии сигнала хотя бы на одном входе прибора транзистор будет разомкнут, диод — замкнут, в результате сигнала на выходе не будет. Поскольку сиг-

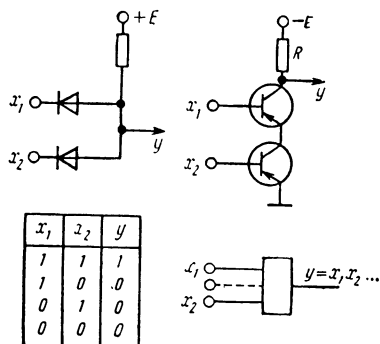


Рис. 3.14

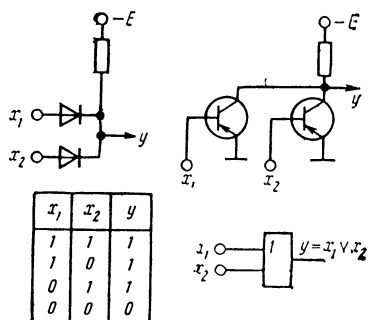


Рис. 3.15

нал на выходе появляется только при одновременном действии сигналов на всех входах, рассматриваемая схема называется также схемой совпадения.

Преобразование, осуществляемое логической схемой И, можно записать в виде таблички, приведенной на рис. 3.14. Там же изображено условное обозначение блока. Логическую функцию, выполняемую схемой И, можно также представить в виде произведения информационных значений входных сигналов:

$$y = x_1 x_2 \dots x_n. \quad (3.8)$$

На рис. 3.15 изображена логическая схема ИЛИ на диодах и транзисторах с непосредственной связью. Для простоты показаны только два входа. *Сигнал на выходе появляется при действии сигнала на любом входе*; только при отсутствии сигналов на входах всех приборов на выходе не появляется сигнала. Для транзисторной схемы высказанное положение очевидно. Что касается диодов, то они проводят (замкнуты) при любом уровне равных напряжений на входах. Нулевому уровню входных сигналов соответствует нулевой уровень выходного сигнала. Но положительный сигнал на любом входе, пройдя

через проводящий диод, перебросит все остальные диоды в непроводящее состояние и образует выходной сигнал. Преобразование, осуществляемое логической схемой ИЛИ, можно записать в виде таблички, которая приведена вместе с условным обозначением блока на рис. 3.15. Логическую функцию, выполняемую схемой ИЛИ, можно представить в виде суммы информационных значений входных сигналов:

$$y = x_1 + x_2 + \dots + x_n. \quad (3.9)$$

На рис. 3.16 представлена логическая схема НЕ, выполненная в виде инвертирующего усилителя на транзисторе с общим эмиттером. При отсутствии сигнала на входе (базе) на выходе

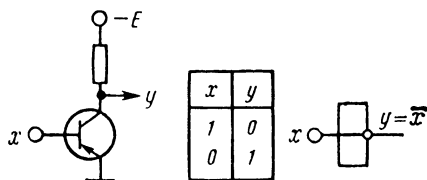


Рис. 3.16

имеется напряжение —  $E$ , а при наличии сигнала на входе напряжение на выходе равно нулю. Как видим, значение сигнала изменяется на обратное. Логическую функцию рассматриваемой схемы записывают в виде

$$y = \bar{x}. \quad (3.10)$$

На рис. 3.16 приведены табличка преобразования, осуществляемого блоком, и его условное обозначение.

## ГЛАВА 4

### НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНДУКТИВНЫЕ И ЕМКОСТНЫЕ ЦЕПИ

#### § 4.1. Нелинейные индуктивные элементы

В этой главе введены индуктивные и емкостные элементы и рассмотрены цепи, составленные только из индуктивных или только из емкостных элементов. Изложение начнем с нелинейного индуктивного элемента.

Характеристика нелинейной индуктивности задается зависимостью между потокоцеплением и током катушки, называемой вебер-амперной характеристикой:

$$\Psi = \Psi(i). \quad (4.1)$$

В отличие от линейной индуктивности, у которой зависимость между потокоцеплением и током линейна:  $\Psi = Li$ , где коэффициент пропорциональности есть индуктивность,

соотношение (4.1) является нелинейной функцией и поэтому не может представляться одним параметром. Так же как и в случае нелинейного резистивного элемента, можно вводить понятия статической и динамической индуктивности для каждой точки нелинейной характеристики.

Физически нелинейная индуктивность представляет собой катушку или несколько катушек, расположенных на замкнутом ферромагнитном сердечнике. Здесь нет того разнообразия устройств и их характеристик, которыми обладал класс резистивных нелинейных элементов.

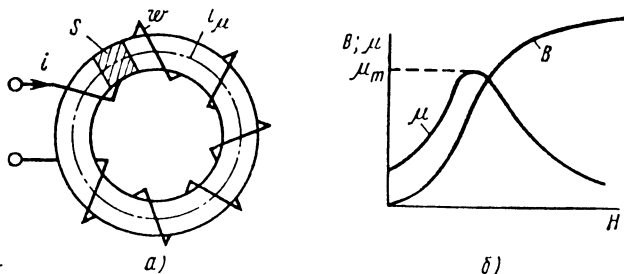


Рис 4.1

На рис. 4.1, а схематически показано устройство двухполюсного индуктивного элемента в виде катушки на замкнутом кольцевом ферромагнитном сердечнике (число витков катушки  $w$ , сечение сердечника  $S$  и средняя длина магнитной линии  $l_\mu$ ). Будем полагать, что внутренний и внешний радиусы кольца мало отличаются друг от друга.

Если принять магнитное поле в сердечнике однородным, то потокосцепление катушки с числом витков  $w$

$$\Psi = \Phi w = BS w, \quad (4.2)$$

где  $\Phi$  — магнитный поток в сердечнике, Вб;  $B$  — магнитная индукция, представляющая собой плотность магнитного потока, Тл или Вб/м<sup>2</sup>.

Значения магнитной индукции и напряженности магнитного поля связаны соотношением

$$B = \mu_a H = \mu_0 \mu H, \quad (4.3)$$

где  $\mu_a$  — абсолютная магнитная проницаемость материала, Гн/м;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  — магнитная постоянная, Гн/м;  $\mu$  — относительная магнитная проницаемость материала (безразмерная величина).

Магнитная проницаемость ферромагнитного материала зависит от напряженности поля сложным нелинейным образом. Это и является причиной нелинейной зависимости (4.1).

Согласно закону полного тока, напряженность магнитного поля  $H$  пропорциональна полному току, создающему это поле; для однородного поля

$$Hl_{\mu} = wi. \quad (4.4)$$

Величину  $Hl_{\mu}$  называют *магнитным напряжением*, а величину  $wi$  — *намагничивающей* (магнитодвижущей) силой. Напряженность магнитного поля измеряется в амперах на метр, а магнитное напряжение и намагничивающая сила (н. с.) — в амперах. При учете (4.2) и (4.4) вебер-амперную характеристику индуктивного элемента можно записать в виде

$$\Psi = BS w = \Psi(Hl_{\mu}/w) = \Psi(i). \quad (4.5)$$

Из этого соотношения следует, что характеристика нелинейной индуктивности определяется зависимостью индукции от напряженности поля:  $B = B(H)$ , т. е. характеристикой намагничивания ферромагнитного материала (стали) сердечника.

Рассмотрим статические характеристики намагничивания, которые представляют собой зависимости между  $B$  и  $H$ , снимаемые экспериментально при *постоянном* или *медленно изменяющемся* (на низких частотах) токе, когда процесс намагничивания успевает устанавливаться в каждый момент времени. Кривую нарастания индукции в предварительно размагниченом материале в зависимости от напряженности поля при медленном строго монотонном увеличении тока от нуля называют *кривой начального намагничивания*. Эта кривая, имеющая область насыщения при больших значениях  $H$ , вместе с кривой статической магнитной проницаемости  $\mu = B/\mu_0 H$  показана на рис. 4.1, б.

Наиболее характерное свойство ферромагнитных материалов заключается в том, что при намагничивании переменным током образуются *петли гистерезиса* — связь между  $B$  и  $H$  имеет вид замкнутой кривой. На рис. 4.2, а показаны симметричные (нормальные) гистерезисные петли, получающиеся при установлении процесса после нескольких периодов намагничивания симметричным полем, изменяющимся в пределах  $\pm H_{\max}$ . Увеличивая степенями  $H_{\max}$ , получим семейство нарастающих петель гистерезиса, вершины которых лежат на кривой, называемой *основной кривой* намагничивания и практически совпадающей с кривой начального намагничивания.

При достаточно больших значениях  $H_{\max}$  увеличение петель гистерезиса прекращается — достигается *предельная пет-*

ля гистерезиса. Петлю гистерезиса можно характеризовать *остаточной индукцией*  $B_r$ , которая сохраняется в материале при снятии поля ( $H = 0$ ), и *коэрцитивной силой*  $H_c$ , равной величине напряженности поля, которую необходимо приложить для размагничивания материала ( $B = 0$ ). Предельную петлю гистерезиса кроме введенных величин, имеющих максимальные значения ( $B_{r\max} H_{c\max}$ ), характеризуют еще *индукцией насыщения*  $B_s$ . Указанные три величины предельной

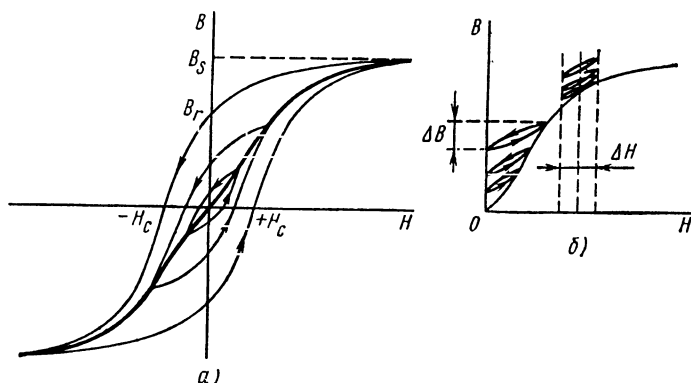


Рис. 4.2

петли гистерезиса являются основными параметрами, характеризующими ферромагнитный материал.

Все петли гистерезиса, кроме предельной, принято называть *частными петлями*. Помимо симметричных частных петель гистерезиса представляют интерес *несимметричные частные петли*, которые получаются при намагничивании несимметричными токами. На рис. 4.2, б показаны частные петли гистерезиса: слева — при намагничивании пульсирующим от 0 до  $U_m$  напряжением одной полярности, например выпрямленным напряжением, когда приращение индукции  $\Delta B$  постоянно; справа — при намагничивании переменным током небольшой величины, наложенным на постоянный ток, когда приращение напряженности  $\Delta H$  постоянно.

Установившийся частный цикл, имеющий форму сплющенного овала, достигается примерно через десяток перемагничиваний.

На основании изложенного можно сделать вывод, что характеристика нелинейной индуктивности является многозначной функцией, параметры которой существенно зависят от

предыстории процесса намагничивания и направления приложенного намагничивающего поля.

Характеристики магнитных материалов в зависимости от вида и состава сплавов сильно отличаются. Различают *магнитно-твердые* и *магнитно-мягкие материалы*. Первые имеют очень большую коэрцитивную силу и применяются в постоянных магнитах. Для индуктивностей, используемых в качестве элементов нелинейных цепей, применяют магнитно-мягкие материалы с узкой петлей гистерезиса. Существуют сплавы, имеющие различные формы петель гистерезиса: почти прямоугольную или особо узкую форму, когда петлю гистерезиса можно заменять основной кривой намагничивания.

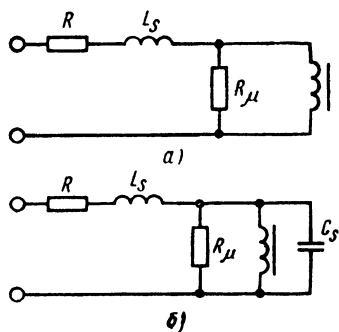


Рис. 4.3

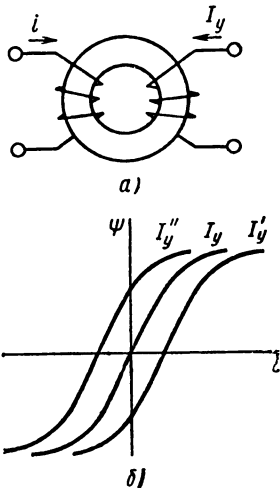


Рис. 4.4

Любой реальный индуктивный элемент обладает следующими потерями: 1) потерями *в меди* вследствие конечной величины сопротивления катушки; 2) потерями *на гистерезис*, пропорциональными площади петли и связанными с потерями при переориентациях элементарных магнетиков; 3) потерями *на вихревые токи*, вызванными наведением э. д. с. в листах стали переменным магнитным потоком сердечника; эти потери прямо пропорциональны квадратам частоты и индукции и обратно пропорциональны квадрату толщины листа стали, поэтому при повышенных частотах необходимо уменьшать толщину листов сердечника или применять неметаллический ферромагнитный материал типа феррита с очень высоким удельным электрическим сопротивлением.

Вихревые токи изменяют кривые намагничивания: петли гистерезиса с учетом вихревых токов получаются шире статических петель.



С учетом потерь для катушки со стальным сердечником можно составить приближенную схему замещения, приведенную на рис. 4.3, *а*, где  $\bar{R}$  учитывает потери в меди, а  $\bar{R}_\sigma$  — потери в сердечнике (на гистерезис и вихревые токи). На высоких частотах необходимо еще учитывать емкости между слоями многослойной обмотки и обмотки по отношению к сердечнику. Эту паразитную емкость присоединяют параллельно нелинейной индуктивности (рис. 4.3, *б*). Как видно, схема замещения катушки на высоких частотах получается довольно сложной. В этой главе будем пренебрегать всеми паразитными параметрами и предполагать нелинейный индуктивный элемент идеальным и, кроме того, учитывать статическую петлю гистерезиса.

Расположив на одном и том же сердечнике несколько обмоток, можно получить многополюсный индуктивный элемент. На рис. 4.4, *а* показан четырехполюсный элемент с двумя катушками. Если через одну из обмоток, называемую управляющей, пропускать постоянный ток, величину которого можно регулировать, то получим управляемый индуктивный элемент. Управляющий квазипостоянный ток смещает вдоль оси абсцисс характеристики элемента (рис. 4.4, *б*), в качестве которых принята основная кривая намагничивания.

## § 4.2. Расчет нелинейных цепей, составленных из индуктивных элементов

Нелинейные цепи, содержащие только индуктивные элементы, — как нелинейные, так и линейные, задаются своими вебер-амперными характеристиками  $\Psi_k = \Psi_k(i_k)$ . Эти характеристики обычно представляются экспериментально снятыми кривыми и могут быть приближенно записаны аналитически — в виде полинома или трансцендентной функции, т. е. в виде функционального соотношения.

При анализе индуктивных цепей целесообразно от обычно принимаемых в качестве переменных *напряжений* перейти к *потокосцеплениям*. Потокосцепление и напряжение связаны простыми соотношениями:

$$u = d\Psi/dt; \Psi = \int u dt. \quad (4.6)$$

Если задано напряжение, то для определения потокосцепления достаточно произвести интегрирование, а для определения напряжения по найденному потокосцеплению — взять производную. Очевидно, уравнение равновесия напряжений в контуре  $\sum \pm u_k = 0$  согласно (4.6) эквивалентно уравнению равновесия потокосцеплений в контуре  $\sum \pm \Psi_k = 0$ . Следовательно, *уравнения соединений* индуктивной цепи можно со-

ставлять непосредственно для потокоцеплений и токов, которые и принимаются в качестве переменных. Основное преимущество перехода к указанным переменным состоит в том, что уравнения индуктивных элементов выражаются функциональными соотношениями  $\Psi_k = \Psi_k(i_k)$ , аналогичными вольт-амперным характеристикам резисторов. Отсюда следует, что при выбранных переменных анализ индуктивных цепей аналогичен анализу резистивных цепей: расчет можно производить теми же методами, которые были рассмотрены в гл. 2, в частности графическими методами. С помощью указанных ме-

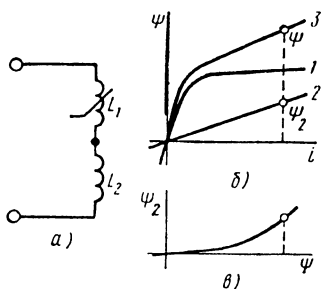


Рис. 4.5

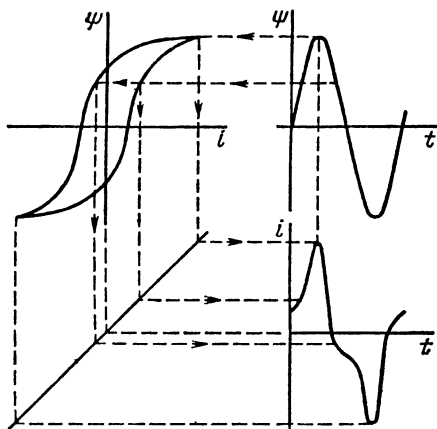


Рис. 4.6

тодов могут быть определены входные характеристики  $\Psi = \Psi(i)$  или  $i = i(\Psi)$  и передаточные характеристики  $\Psi_2 = \Psi_2(\Psi)$  или  $i_2 = i_2(i)$ .

Возьмем простейшую цепь, состоящую из двух последовательно соединенных индуктивных элементов (рис. 4.5, а). На рис. 4.5, б показаны вебер-амперные характеристики обоих элементов (кривые 1 и 2). Кривая 3 представляет результирующую входную характеристику цепи, полученную суммированием ординат потокоцеплений характеристик обоих элементов. Взяв ординаты кривых 3 и 2 и отложив их соответственно по осям абсцисс и ординат, получим передаточную характеристику цепи  $\Psi_2 = F(\Psi)$ , изображенную на рис. 4.5, в.

Рассмотрим графическое определение реакции при действии на входе источника переменного напряжения или тока. Пусть задана входная характеристика цепи, имеющая типичный вид кривой намагничивания ферромагнитного сердечника (рис. 4.6).

Примем сначала, что цепь подключена к источнику *синусоидального напряжения*  $u = U_m \cos \omega t$  и требуется найти кривую входного тока графическим способом.

В первую очередь находим потокосцепление

$$\Psi(t) = \int u dt = \frac{U_m}{\omega} \sin \omega t = \Psi_m \sin \omega t.$$

Амплитуда потокосцепления

$$\Psi_m = B_m S \omega = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{2} U,$$

где  $U$  — действующее значение напряжения.

Отсюда, между прочим, следует формула, часто используемая для определения напряжения, индуктированного в катушке синусоидальным магнитным потоком с амплитудой  $\Phi_m = B_m S$ :

$$U = 4,44 f \omega B_m S. \quad (4.7)$$

График синусоидального потокосцепления приведен на рис. 4.6 (справа). С помощью построений проекций находим график тока  $i(t)$ , расположенный под графиком  $\Psi(t)$ . Как видим, форма тока *несинусоидальна* — она имеет *заостренную* форму и содержит *третью*, а также другие нечетные гармоники. Первая

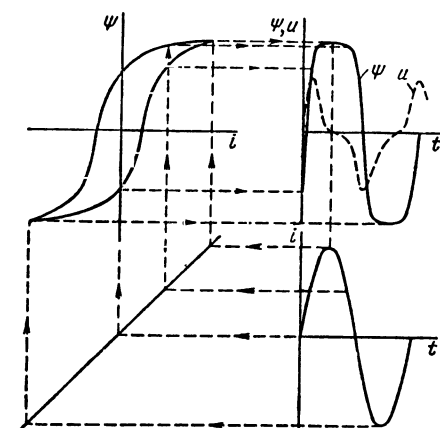


Рис. 4.7

гармоника тока отстает по фазе от напряжения на угол, меньший  $90^\circ$ , что связано с потерями на гистерезис.

Рассмотрим теперь действие на ту же цепь источника *синусоидального тока*  $i = I_m \sin \omega t$ , приводящего к намагничиванию сердечника синусоидальным потоком.

На рис. 4.7 изображены характеристики  $\Psi(i)$  и график тока (справа внизу). С помощью соответствующих построений получаем кривую потокосцепления, которая также *несинусоидальна* — имеет *уплощенную* форму. Продифференцировав потокосцепление, получим искомое напряжение, которое изображено пунктирной линией. Напряжение состоит из четко выраженных положительных и отрицательных пиков, расположенных в местах быстрого нарастания и спада потокосцепления.

### § 4.3. О расчете магнитных цепей

Как было отмечено, одним из основных элементов нелинейной катушки индуктивности является ферромагнитный сердечник или магнитопровод, назначение которого состоит в увеличении магнитного потока для заданной намагничивающей силы и концентрации потока в объеме, занимаемом сердечником.

Применяемые магнитопроводы бывают неоднородными (неодинакового сечения, включают воздушные зазоры или материалы с различными значениями  $\mu$ ) и имеют разветвленную конфи-

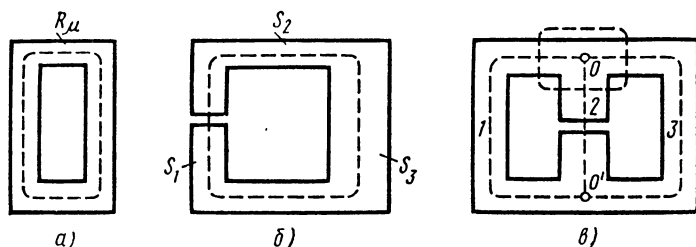


Рис. 4.8

гурацию. Эту систему из катушек с ферромагнитными сердечниками, служащую для создания требуемого магнитного потока, называют магнитной цепью. На практике часто возникает потребность в расчете магнитных цепей, используемых в конструкциях электромагнитных приборов и реле, электрических машин и т. д. Типичные конфигурации магнитных цепей приведены на рис. 4.8. На рис. 4.8, а показана неразветвленная или одноконтурная однородная цепь с одинаковыми сечениями и проницаемостями, на рис. 4.8, б — одноконтурная, но неоднородная цепь, состоящая из отдельных участков с различными сечениями и проницаемостями, а на рис. 4.8, в — разветвленная цепь с двумя точками разветвления (узлами). Для удобства в каждом стержне наносятся средние линии, по которым определяются длины магнитных линий участков.

Расчет магнитных цепей можно производить на основе аналогии между магнитной и резистивной цепями. Для установления аналогии поле в сечениях отдельных участков магнитной цепи предполагается однородным. Это условие приближенно выполняется, если принять: 1) поперечные размеры сердечника невелики по сравнению с его длиной; 2) нет глубокого насыщения, относительная магнитная проницаемость материа-

ла  $\mu \gg 1$  и можно пренебречь потоками рассеяния, которые замыкаются по воздуху, минуя сердечник; 3) величины зазоров малы по сравнению с поперечными размерами сердечника.

Формальная аналогия между магнитной и резистивной цепями получается, если в качестве аналогов принять следующие величины:

электрический ток — магнитный поток;

электрическое напряжение — магнитное напряжение;

напряжение источника напряжения — намагничивающая сила;

электрическое сопротивление — магнитное сопротивление.

Направление намагничивающей силы устанавливается по направлению тока в катушке и направлению ее намотки согласно правилу правого винта. Положительные направления потоков в отдельных ветвях цепи могут быть выбраны произвольно.

Установим *законы магнитной цепи*, представляющие аналогии законов Кирхгофа и Ома для резистивной цепи. Для потока в неразветвленной однородной магнитной цепи имеем на основании закона полного тока (4.4) и соотношения (4.3)

$$\Phi = BS = \mu HS = \mu S \frac{wi}{l_{\mu}} = \frac{F}{R_{\mu}}, \quad (4.8)$$

где  $F = wi$  — намагничивающая сила;  $R_{\mu} = l_{\mu}/\mu S$  — магнитное сопротивление, прямо пропорциональное длине магнитопровода и обратно пропорциональное его сечению; проницаемость играет роль удельной проводимости.

В результате получился аналог закона Ома для магнитной цепи.

Аналог закона равновесия напряжений в контуре получится, если применить закон полного тока к магнитному контуру, имеющему ряд участков с различными поперечными сечениями и проницаемостями и несколько намагничивающих катушек (см. рис. 4.8, б). В этом случае закон полного тока (4.4) можно записать в виде

$$\sum F_k = \sum w_k i_k = \sum H_k l_k = \sum u_{\mu k}. \quad (4.9)$$

Здесь магнитное напряжение  $k$ -го участка

$$u_{\mu k} = H_k l_k = \frac{B}{\mu_k} l_k = \frac{\Phi l_k}{\mu_k S_k} = \Phi R_{\mu k}.$$

В силу принятых допущений и непрерывности магнитного потока его величина одинакова на всех участках. Выражение (4.9) является аналогом второго закона Кирхгофа для маг-

нитной цепи, который формулируется таким образом: *в замкнутом контуре сумма намагничивающих сил равна сумме магнитных напряжений.*

Аналог первого закона Кирхгофа для магнитной цепи получается сразу из принципа непрерывности магнитного потока:

$$\oint \bar{B} d\bar{S} = 0$$

и в общем случае имеет следующую формулировку: *магнитный поток, проходящий через любую замкнутую поверхность, равен нулю.*

Применение этого условия к любому узлу, например к узлу на рис. 4.8, в, где замкнутая поверхность изображена пунктирной линией, при учете потоков только в стержнях сердечников (ветвях магнитной цепи) дает уравнение

$$\Sigma \Phi_i = \Sigma B_i S_i = 0, \quad (4.10)$$

т. е. алгебраическая сумма магнитных потоков в узле магнитной цепи равна нулю.

Теперь, когда установлены законы для магнитной цепи (4.9) и (4.10), аналогичные законам Кирхгофа для электрической цепи, ясно, что анализ магнитных цепей можно производить аналогично анализу резистивных цепей. При анализе магнитных цепей предполагаются заданными геометрические размеры всех участков и характеристики материалов (основные кривые намагничивания). Обычно ставятся две задачи: 1) заданы нужные величины потоков и требуется найти намагничивающие силы, необходимые для их создания; 2) заданы действующие намагничивающие силы и требуется найти потоки на всех участках.

Намагничивающие силы и потоки принимаются постоянными. В случае переменных потоков невысоких частот, создаваемых одним намагничивающим источником, расчет ведется для амплитудных значений.

Рассмотрим решение указанных задач для неразветвленной магнитной цепи, состоящей из нескольких участков (см. рис. 4.8, б).

1. По заданному потоку и сечениям находим индукции участков  $B_k = \Phi/S_k$ ; затем из характеристик материалов определяем напряженность поля  $H_k$ . Просуммировав магнитные напряжения согласно (4.9), получаем искомую намагничивающую силу:

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 = F = \omega l. \quad (4.11)$$

2. При заданной намагничивающей силе сразу определить поток в случае нескольких участков невозможно. Поэтому при-

ходится, задаваясь несколькими значениями  $\Phi_k$ , находить согласно (4.11) соответствующую величину  $F_k$ , и строить кривую зависимости  $\Phi_k(F_k)$ , из которой по заданной н.с.  $F$  определяется искомый поток  $\Phi$ .

Часто применяется цепь, состоящая из двух участков — линейного (воздушный зазор) и нелинейного (материал сердечника, например сталь), заданного характеристикой  $B = B(H)$ . Здесь можно по аналогии с резистивной цепью (см. § 2.7) сразу найти решение по точке пересечения характеристики участка из стали  $\Phi = \Phi(Hl)$  и линейной характеристики системы из заданной намагничивающей силы и воздушного зазора, определяемой уравнением  $F = R_\mu \Phi + Hl$ , где  $R_\mu = l_v / \mu S$  — магнитное сопротивление зазора.

В случае разветвленных цепей необходимо наметить независимые узлы и контуры и составить уравнения равновесия потоков и магнитных напряжений, которые образуют уравнения соединений. К счастью, конфигурации магнитных цепей не бывают очень сложными, так что число уравнений соединений обычно невелико. Часто цепи обладают симметрией, позволяющей свести их к неразветвленным цепям.

Характеристики ветвей, связывающие магнитные напряжения  $U_{\mu k} = H_k l_k$  отдельных участков и потоки, выражаются уравнениями

$$\Phi_k = \Phi_k(H_k l_k) = \Phi_k(U_{\mu k}). \quad (4.12)$$

Эти магнитные характеристики ветвей являются нелинейными — они определяются характеристиками намагничивания, в качестве которых, как указывалось, принимаются основные кривые намагничивания  $B_k = B_k(H_k)$ . Последние должны быть пересчитаны в магнитные характеристики ветвей с учетом геометрических размеров участков. Используя характеристики ветвей (4.12), из уравнений соединений исключают половину переменных. Полученные после преобразований функциональные уравнения (одно или несколько) могут быть решены аналогично уравнениям резистивных цепей. В частности, удобно применять графический метод, не требующий аналитического представления характеристик (4.12).

#### § 4.4. Некоторые применения нелинейных индуктивных цепей

Нелинейные индуктивные цепи широко применяются на практике. Очень важное преимущество магнитных элементов заключается в их высокой надежности и долговечности. Рассмотрим кратко такие элементы, как магнитный усилитель и

умножитель частоты, а также применение магнитных элементов в ЦВМ.

**Магнитный усилитель.** Магнитный усилитель представляет собой элемент, управляемый постоянным током.

Простейший однотактный магнитный усилитель состоит из двух одинаковых замкнутых сердечников с двумя обмотками на каждом из них: *управляющей*  $w_1$  с большим числом витков и *рабочей* с малым числом витков (рис. 4.9, а). Рабочие обмотки обоих сердечников соединяются последовательно и при-

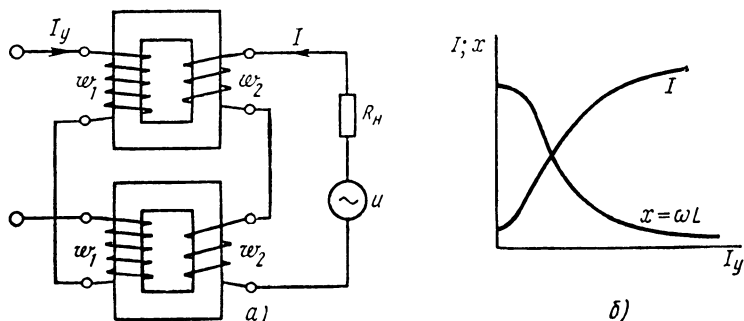


Рис. 4.9

соединяются к нагрузке и источнику питания, представляющему собой источник переменного напряжения. Под действием источника через нагрузку и рабочие обмотки проходит переменный ток, величина которого должна изменяться приблизительно пропорционально управляющему току. Управляющий квазипостоянный ток, частота которого намного ниже частоты рабочего тока (тока нагрузки), протекая по управляющим обмоткам, соединенным встречно, подмагничивает сердечники. При встречном соединении большие напряжения, которые индуктируются в обеих управляющих обмотках переменным потоком сердечника, созданным рабочим током, компенсируют друг друга и не влияют на работу всего устройства. Это объясняет необходимость применения двух одинаковых магнитных систем.

Чем больше управляющий ток подмагничивает сердечники, тем меньше индуктивность и индуктивное сопротивление рабочей обмотки и тем больше рабочий ток, который равен

$$I = \frac{U}{\sqrt{R_{\text{н}}^2 + \omega^2 L^2}}.$$



На рис. 4.9, б представлены примерные кривые зависимостей изменения индуктивности рабочей обмотки и рабочего тока от управляющего тока. Коэффициент усиления тока приблизительно пропорционален отношению витков управляющей и рабочей обмоток:

$$I/I_y \approx \omega_1/\omega_2.$$

**Умножитель частоты.** Для умножения частоты мощного источника переменного тока применяют магнитные цепи. На рис. 4.10, а показана схема утроения частоты, выделяющая третью гармонику. Схема состоит из двух ферромагнитных сер-

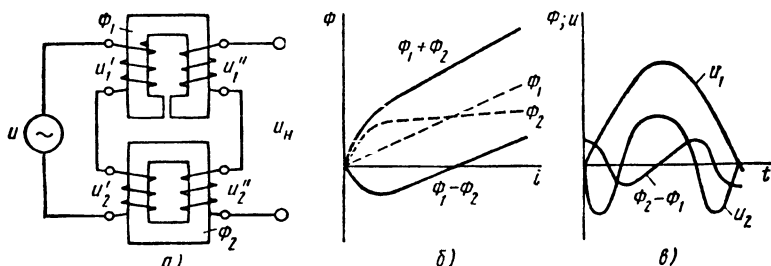


Рис. 4.10

дечников с двумя обмотками на каждом из них. Первый сердечник имеет воздушный зазор и, следовательно, линейную характеристику, второй сердечник без зазора, имеет нелинейную характеристику (рис. 4.10, б). К первичным обмоткам, соединенным последовательно и согласно, приложено синусоидальное напряжение

$$u = U_m \cos \omega t = u_1' + u_2' = \omega_1 \frac{d\Phi_1}{dt} + \omega_2 \frac{d\Phi_2}{dt}.$$

Общий поток

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{U_m}{\omega \omega_1} \sin \omega t.$$

Вторичные обмотки соединены встречно, поэтому выходное напряжение равно разности напряжений:

$$u_H = u_1'' - u_2'' = \omega_1 \frac{d\Phi_1}{dt} - \omega_2 \frac{d\Phi_2}{dt} = \omega_2 \frac{d}{dt} (\Phi_1 - \Phi_2).$$

На рис. 4.10, б показаны кривые суммы и разности потоков.

По графику синусоидального общего потока и характеристике  $\Phi_1 + \Phi_2$  можно найти (см. построения на рис. 4.6) фор-

му намагничивающего тока  $i_1$  в первичной обмотке, а по ней и характеристике с помощью построений, аналогичных приведенным на рис. 4.7, — график изменения разности потоков в функции времени. Взяв производную от последней функции (рис. 4.10, в), получим график напряжения на выходе, который имеет явно выраженную третью гармонику. Соответствующим подбором числа витков вторичных обмоток, а также характеристики материала сердечника можно добиться минимума других гармоник.

**Применение магнитных элементов в ЦВМ.** Магнитные элементы также используются в ЦВМ. Прежде всего элемент в виде миниатюрного кольца диаметром менее 1 мм из ферромагнитного материала с прямоугольной петлей гистерезиса применяется в качестве элемента оперативной памяти. Остаточная индукция, близкая по величине к индукции насыщения, может

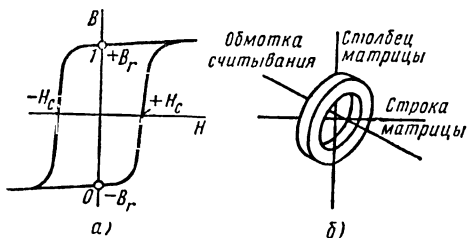


Рис. 4.11

в зависимости от знака предварительного намагничивания иметь два знака — положительный или отрицательный, т. е. находиться в *двух устойчивых состояниях* (рис. 4.11, а).

В любой момент сердечник может находиться только в одном из этих состояний, причем сколь угодно длительно. Для перевода элемента из состояния  $+B_r$ , принимаемого за 1, необходимо приложить к обмотке короткий импульс отрицательного тока — как только поле станет больше коэрцитивной силы, произойдет быстрое перемагничивание и переход в состояние  $-B_r$ , принимаемое за 0. После приложения положительного импульса состояние  $+B_r$  не изменится. Следовательно, *магнитный элемент представляет собой двоичный элемент*. В каждом сердечнике с помощью обмоток записи можно записать и хранить длительное время один разряд двоичного числа. Для машины необходимо иметь большое число сердечников с обмотками, образующих матрицу памяти.

Каждый сердечник имеет две обмотки *записи*, работающие по принципу совпадения, и обмотку *считывания*. Обмотки записи выполняются одновитковыми в виде двух прямых проводников горизонтального (строка матрицы) и вертикального (столбец матрицы) (рис. 4.11, б) Принцип совпадения означает, что через проводник-строку и проводник-столбец пропускается только половина необходимого для перемагничивания

тока, которая недостаточна для изменения состояния сердечника. Перемагнитится только сердечник, находящийся на пересечении выбранных строки и столбца, по которым пропущены токи. Изменение потока при быстром перемагничивании наведет напряжение в проводнике—обмотке считывания.

Магнитные сердечники используются также в качестве других элементов ЦВМ, в частности на магнитных элементах можно построить логические схемы, которые были рассмотрены в § 3.7.

#### § 4.5. Нелинейные емкостные элементы и емкостные цепи

Существует ряд емкостных элементов, изготовленных из материалов с нелинейными характеристиками, зависящими от величины электрического поля или приложенного напряжения.

**Вариконд.** Вариконд — керамический материал, относящийся к классу сегнетодиэлектриков, у которых *диэлектрическая проницаемость не является постоянной величиной, а зависит от напряженности электрического поля*. Емкость конденсатора с таким материалом зависит от приложенного напряжения. Характеристика конденсатора из вариконда — зависимость заряда от напряжения — приведена на рис. 4.12, а. Характеристика имеет вид, аналогичный кривой намагничивания ферромагнитного материала — наблюдаются

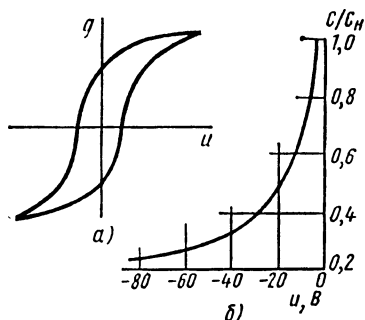


Рис. 4.12

явления гистерезиса и насыщения, а также влияние предыстории на характер процесса. В результате приложения симметричного периодического напряжения получим симметричные частные петли, вершины которых лежат на основной кривой характеристики

Площадь гистерезисной петли также пропорциональна потерям энергии в объеме материала, называемых **д и э л е к т р и ч е с к и м и** п о т е р я м и. Диэлектрические потери в сегнетодиэлектриках получаются большими. Этот недостаток и нестабильность емкости, сильно зависящей от температуры, препятствуют широкому использованию варикондов

**Варикап.** Варикапом называют барьерную емкость **о б р а т н о** смещенного **p-n**-перехода, выполненного в виде специаль-

ного диода. Барьерная емкость обусловлена объемными зарядами в  $p$ - и  $n$ -областях. Она существенно зависит от значения обратного напряжения, приложенного к  $p$ - $n$ -переходу, т. е. проявляется в области отрицательных напряжений.

На рис. 4.12, б представлена зависимость относительной барьерной емкости  $C/C_n$  от величины обратного напряжения ( $C_n$  — значение емкости при номинальном напряжении, которое составляет единицы и десятки пикофарад). С повышением обратного напряжения барьерная емкость уменьшается, что объясняется увеличением ширины запирающего слоя, разделяющего объемные заряды. Отношение максимального значения емкости к минимальному, называемое *коэффициентом перекрытия*, равно 3—4.

Важной характеристикой варикапов является добротность, представляющая отношение емкостной проводимости при заданной частоте к активной проводимости, учитывающей потери. Добротность возрастает с повышением обратного напряжения и падает с увеличением частоты. Большое преимущество варикапов состоит в том, что они применимы на очень высоких частотах и представляют безынерционную емкость, регулируемую обратным напряжением. Это позволяет применять их для автоматической подстройки частоты колебательных контуров, регулирования времени задержки цепей и т. п. Особо важным является использование варикапов для параметрического усиления сигналов.

**Управляемая емкость.** Существует ряд датчиков, в которых используется изменение емкости между обкладками конденсатора в результате действия какой-либо физической величины. Одним из таких устройств является датчик давления, основанный на изменении емкости вследствие деформации упругих пластин — обкладок конденсатора, пропорциональной величине давления. Здесь кулон-вольтная характеристика будет представляться семейством прямых в некоторой области, проходящих через начало координат и соответствующих различным давлениям.

*Емкостная цепь* составляется из емкостных элементов, как линейных, так и нелинейных, которые задаются своими кулон-вольтными характеристиками  $q_k = q_k(u_k)$ . Эти характеристики представляются экспериментально снятыми кривыми, которые могут быть также приближенно записаны в аналитическом виде. Анализ емкостных цепей, так же как и индуктивных, можно свести к анализу резистивных цепей, если вместо токов в качестве переменных принимать заряды. Заряд и ток связаны соотношениями

$$i = dq/dt; \quad q = \int idt. \quad (4.13)$$

Для перехода от тока к заряду достаточно произвести интегрирование, а для обратного перехода к току — дифференцирование заряда. Закон равновесия токов в ветвях сечения  $\Sigma \pm i_k = 0$  согласно (4.13) можно записывать в виде закона равновесия зарядов  $\Sigma \pm q_k = 0$ . Таким образом, уравнения соединений для независимых контуров и сечений емкостной цепи можно составлять через выбранные переменные — *заряды и напряжения*.

Уравнения емкостных элементов, связывающие заряды и напряжения, выражаются функциональными соотношениями вида  $q_k = q_k(u_k)$ , которые аналогичны вольт-амперным характеристикам резистивных элементов. Отсюда следует вывод: при указанном выборе переменных анализ емкостных цепей можно производить аналогично анализу резистивных цепей, используя методы, изложенные в гл.2. Так же как и в случае резистивных цепей, можно определить, например, с помощью графических построений входную или передаточную характеристику. Здесь положение аналогично анализу индуктивных цепей: по заданному переменному сигналу, действующему на входе, и характеристикам цепи можно найти реакцию — заряд или напряжение в интересующей ветви.

## ГЛАВА 5

### УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

#### § 5.1. О порядке цепи и выборе переменных уравнений

До сих пор изучались цепи, содержащие элементы одного вида, в основном резистивные цепи. Такие цепи описывались системами функциональных нелинейных уравнений.

Перейдем к рассмотрению нелинейных цепей общего вида, содержащих элементы различных видов, как резистивные, так и реактивные.

*Нелинейные цепи с элементами различных видов* в отличие от нелинейных цепей с элементами одного вида *описываются системами нелинейных дифференциальных уравнений*. Указанные цепи или системы, процессы в которых определяются из решений дифференциальных уравнений, называются **динамическими**.

В данной главе рассмотрим основные вопросы составления систем дифференциальных уравнений, описывающих поведение динамических цепей, и укажем на некоторые их особен-

ности. Сначала выясним очень важный вопрос определения *порядка цепи*, т. е. порядка дифференциального уравнения, решение которого должно дать искомую реакцию цепи, и укажем путь наиболее рационального выбора переменных, входящих в уравнения цепи.

Пусть выбраны переменные и на основе законов Кирхгофа составлена система из необходимого числа независимых дифференциальных уравнений. Путем подстановок и исключения переменных система уравнений может быть приведена к одному дифференциальному уравнению более высокого порядка относительно выбранной переменной. Сформулируем правило определения порядка дифференциального уравнения, которое имеет важное значение для составления уравнений динамических цепей.

Как известно, решение дифференциального уравнения  $n$ -го порядка имеет  $n$  произвольных постоянных интегрирования. Для однозначного определения указанных постоянных необходимо иметь  $n$  независимых уравнений, составляемых на основе того, чтобы решения удовлетворяли и независимым начальным условиям. Исходные начальные условия в электрической цепи задаются в виде зарядов (напряжений) емкостей и потокосцеплений (токов) индуктивностей в момент  $t = t_0$  приложения внешнего воздействия. Задание начальных условий избавляет от необходимости знания предыстории, т. е. напряжений емкостей и токов индуктивностей до момента  $t_0$  достаточно знать токи  $i_C$  и напряжения  $u_L$ , начиная с момента приложения сигнала, чтобы знать поведение элементов в любой момент времени  $t > t_0$ :

$$\begin{aligned} q &= q(0) + \int_0^t dq(t); \quad u_C(t) = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt; \\ \Psi &= \Psi(0) + \int_0^t d\Psi; \quad i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Общее число независимых начальных условий, очевидно, равно числу  $n_L + n_C$  индуктивных и емкостных элементов. По этим условиям можно определить  $n = n_L + n_C$  постоянных интегрирования. На основании сказанного приходим к выводу: *максимальный порядок дифференциального уравнения должен быть равен числу емкостей и индуктивностей цепи, в которых можно задавать независимо, т. е. произвольным образом, начальные заряды (напряжения) и начальные потокосцепления (токи).*

Если динамическая цепь не содержит контуров из емкостных элементов и источников напряжения (рис. 5.1, а), а также сечений из индуктивностей и источников тока (рис. 5.1, б), то начальные условия будут независимыми и порядок дифференциального уравнения равен общему числу емкостей и индуктивностей.

При наличии контуров из емкостей и источников напряжения, очевидно, напряжения на элементах невозможно задавать независимо друг от друга, так как по закону Кирхгофа

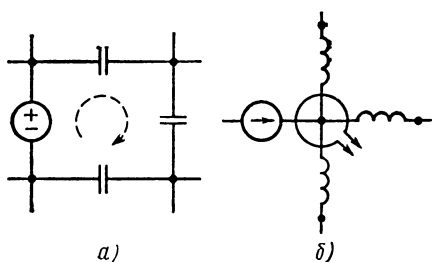


Рис. 5.1

сумма напряжений равна нулю. *Общее число условий зависимости начальных напряжений равно числу независимых контуров, образованных емкостями и источниками напряжения.* Для наглядного выявления подобных контуров следует разомкнуть все элементы, кроме емкостей и источников напряжения.

Аналогично при наличии сечений из индуктивностей и источников тока токи элементов нельзя задавать независимо друг от друга: по закону Кирхгофа сумма токов равна нулю. *Общее число условий зависимости начальных токов равно числу независимых сечений, образованных индуктивностями и источниками тока.* Чтобы наглядно выявить указанные сечения, следует замкнуть накоротко все элементы, кроме индуктивностей и источников тока.

На рис. 5.2, а показан пример сложной цепи, содержащей десять емкостных и индуктивных элементов.

Емкостная подцепь (рис. 5.2, б) содержит два независимых контура. Два уравнения равновесия напряжений на этих контурах дают два условия зависимости начальных напряжений в емкостных элементах. Индуктивная подцепь (рис. 5.2, в) имеет два независимых узла. Два уравнения равновесия токов в этих узлах дают два условия зависимости начальных токов в индуктивных элементах. Следовательно, порядок уравнения цепи будет равен  $10 - 2 - 2 = 6$ . В тех случаях, когда число элементов, запаасающих энергию, превышает порядок дифференциального уравнения, составление уравнений усложняется.

Следует заметить, что контуры из емкостей и источников напряжения, а также сечения из индуктивностей и источников тока являются следствием идеализации. Достаточно добавить имеющиеся в реальных цепях паразитные параметры,

чтобы устранить эти контуры и сечения. Для этого можно учесть, например, конечные сопротивления и проводимости источников напряжения и тока, а также последовательную паразитную индуктивность в емкостном контуре и параллельную паразитную емкость в индуктивном сечении. Далее при рассмотрении составления уравнений наибольшее внимание уделяется случаю отсутствия в цепи контуров из емкостей и се-

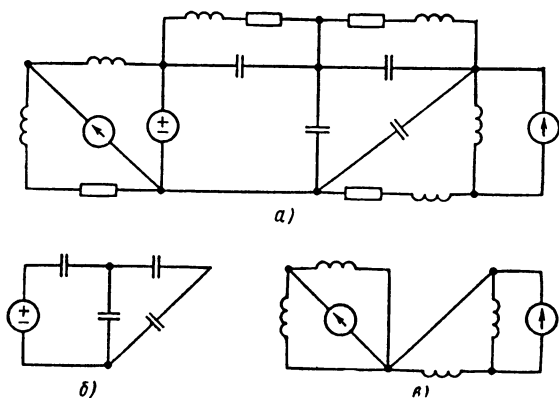


Рис. 5.2

чений из индуктивностей, когда число элементов, запасующих энергию, в точности равно порядку дифференциального уравнения.

Получение системы уравнений сложных нелинейных цепей общего вида представляет довольно трудную задачу. При этом очень важное значение имеет *выбор переменных, однозначно определяющих поведение цепи*. Если в качестве переменных принять напряжения и (или) токи произвольно выбранных ветвей, то переход от уравнений соединений цепи, составленных по законам Кирхгофа, и уравнений элементов к системе дифференциальных уравнений может оказаться весьма затруднительным.

Выбор переменных влияет на форму системы уравнений. От формы системы уравнений и физического смысла выбранных переменных существенно зависят анализ цепи и интерпретация соответствующих решений. Поэтому адекватный выбор наименьшего числа независимых переменных, полностью определяющих поведение нелинейной цепи, имеет важное значение при анализе нелинейных цепей. Наиболее рациональным является выбор системы переменных, которая приводила бы к си-





$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}e_1 + b_{12}e_2 + \dots + b_{1n}e_n; \\ x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}e_1 + b_{22}e_2 + \dots + b_{2n}e_n; \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}e_1 + b_{n2}e_2 + \dots + b_{nn}e_n. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Так как каждое уравнение в системах (5.2) и (5.3) является уравнением первого порядка, *число уравнений состояния в точности равно порядку  $n$  дифференциального уравнения цепи, т. е. числу элементов, в которых можно независимо задать начальные запасы энергии.*

Необходимо отметить, что выбор  $n$  переменных состояния, приводящих к системе уравнений вида (5.2) или (5.3), не является единственным: ряд различных систем переменных может давать уравнения в нормальной форме с соответственно различными функциями  $\tilde{f}_i$  в правой части.

Для электрических цепей наиболее удобным является выбор в качестве переменных состояния зарядов (напряжений) емкостей и потокосцеплений (токов) индуктивностей. Ниже покажем, что заряды  $q_i$  емкостей и потокосцепления  $\Psi_k$  индуктивностей полностью определяют поведение электрической цепи: достаточно знать величины  $q_i$  и  $\Psi_k$ , чтобы найти реакции всех ветвей цепи.

Выбор в качестве переменных состояния зарядов (напряжений) емкостей и потокоцеплений (токов) индуктивностей позволяет сопровождать отдельные этапы составления уравнений, а также процесс анализа схемами замещения, состоящими из резистивной подцепи и источников, которыми замещаются реактивные элементы. Указанные схемы систематизируют и упрощают этапы составления уравнений и некоторые моменты получения их решений.

В качестве переменных состояния, очевидно, можно принимать любую линейно независимую комбинацию зарядов (напряжений) емкостей и потокосцеплений (токов) индуктивностей. Из систем переменных состояний, не являющихся непосредственно зарядами (напряжениями) емкостей и потокосцеплениями (токами) индуктивностей, наибольший интерес представляет следующая система, называемая нормальной: в качестве переменных  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) принимаются одна из интересующих реакций и ее производные — от первого до  $(n - 1)$ -го порядка, т. е.

$$x = x_1, \quad x_2 = \dot{x}_1, \dots, \quad x_n = x_{n-1}.$$

Пусть задано линейное уравнение  $n$ -го порядка, правая часть которого не содержит производных от воздействия

$$\frac{d^n x}{dt^n} + \alpha_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + \alpha_1 \frac{dx}{dt} + \alpha_0 x = e.$$

При указанном выборе нормальных переменных уравнение всегда может быть представлено в виде системы  $n$  уравнений первого порядка:

$$x_1 = x_2;$$

$$x_2 = x_3;$$

$$x_n = -\alpha_{n-1}x_{n-1} - \dots - \alpha_1x_2 - \alpha_0x_1 + e. \quad (5.4)$$

В справедливости такого представления легко убедиться, если подставить в последнее уравнение первые  $n - 1$  уравнений.

Пусть для примера задано нелинейное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \varphi_1(x, dx/dt) + \varphi_2(x, t) = 0.$$

Для получения системы уравнений через нормальные переменные состояния полагаем  $x = x_1$  и  $\dot{x}_1 = x_2$  и переписываем заданное уравнение в виде

$$dx_1/dt = x_2;$$

$$dx_2/dt = -\varphi_1(x_1, x_2) - \varphi_2(x_1, t).$$

Подобным же образом можно представить любое нелинейное уравнение  $n$ -го порядка через нормальные переменные.

Далее в этой главе будем полагать, что переменными состояниями являются заряды или напряжения емкостей и потоко-сцепления или токи индуктивностей.

Остановимся кратко на вопросе о достаточности указанного выбора переменных и соответствующих уравнений состояния для определения режима цепи при всех значениях  $t > t_0$ . Прежде всего из системы уравнений состояния (5.2) или (5.3) следует, что если в любой момент времени известны значения переменных состояния и действующие в цепи сигналы, то для этого же момента известны скорости изменения переменных состояния — они могут быть вычислены по заданным уравнениям.

По известным для начального момента времени  $t = t_0$  значениям переменных состояний  $x_i(0)$  и скоростей их изменения  $\dot{x}_i(0)$  всегда можно вычислить приращения переменных

на малом интервале  $\Delta t$  и, следовательно, найти значения переменных, а также скорости их изменения в момент времени  $t_1 = t_0 + \Delta t$ . По значениям  $x_i(t_i)$  и  $\dot{x}_i(t_0)$  аналогично можно найти новые приращения переменных на следующем малом интервале. Из приведенных соображений следует, во-первых, вывод о возможности относительно простого числового решения уравнений состояния и, во-вторых, очень важное заключение о том, что *состояние цепи в начальный момент времени  $t_0$  и действующие в цепи при  $t > t_0$  сигналы полностью определяют состояние цепи, т. е. значения переменных состояния, в любой момент времени  $t > t_0$ .*

Если найдены переменные состояния — заряды (напряжения) емкостей и потокосцепления (токи) индуктивностей, то, как будет показано далее, могут быть определены напряжения и токи всех остальных ветвей. Следовательно, *поведение цепи при  $t > t_0$  полностью определяется уравнениями состояния и начальными условиями*

Прежде чем перейти к составлению уравнений состояния нелинейных цепей, отметим основные преимущества применения системы переменных состояния.

1. Анализ нелинейных цепей производится, как правило, во временной области. Использование преобразований Фурье и Лапласа и, следовательно, общего частотного метода, являющегося основным методом анализа линейных цепей, в случае нелинейных цепей невозможно.

Для анализа нелинейных цепей во временной области широко пользуются численными методами решения систем дифференциальных уравнений с помощью ЦВМ. Алгоритмы числового решения легко записать, если дифференциальные уравнения цепи представлены нормальной системой, т. е. в виде уравнений состояния первого порядка (5.2); использование уравнений состояния существенно облегчает численный анализ нелинейных цепей.

2. Для системы уравнений состояния (5.2) можно применить компактную векторно-матричную запись. Для этого вводят столбцовую матрицу переменных состояния, которую называют вектором состояния:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Переменные состояния  $x_i$  являются составляющими или элементами вектора  $\mathbf{x}$ .

Если ввести столбцовую матрицу функций  $f$ ,

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

то систему уравнений состояния (5.2) можно записать в следующей *векторно-матричной форме*:

$$\dot{x} = f(x, t). \quad (5.7)$$

Для уравнений состояния линейных цепей (5.3) вводят дополнительно квадратную *матрицу системы* (цепи), элементами которой являются параметры цепи:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

и квадратную *матрицу внешнего воздействия*

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Систему уравнений состояния (5.3) линейной цепи можно записать в векторно-матричной форме:

$$\dot{x} = Ax + Be. \quad (5.10)$$

Отвлекаясь от многомерности векторов, можно сделать вывод, что внешне системы уравнений состояния (5.7) и (5.10) имеют вид уравнений цепи первого порядка.

В частном случае нормальных переменных состояния (5.4) матрица линейной системы записывается в виде

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

3. Переменным состояния  $x_i$ , т. е. решениям системы уравнений состояния (5.5), можно придать наглядное геометрическое представление. Для этого вводят понятие *n*-мерного

пространства состояний с  $n$ -координатными осями для каждой переменной состояния  $x_i$ , т. е. для каждого элемента вектора состояний. Решение системы уравнений (5.2) или (5.5) для  $n$  переменных состояния  $x_i$  представляется в пространстве состояний некоторой кривой, называемой траекторией. Понятие траектории является весьма важным, оно придает большую наглядность решениям уравнений состояния и будет использовано в этой и последующих главах. Поэтому остановимся подробнее на понятии траектории в  $n$ -мерном пространстве.

Для любого фиксированного момента времени  $t = t_j$  переменные состояния примут определенные значения  $x_i(t_j)$ . Совокупность  $n$  значений  $x_i(t_j)$  в принятой системе координат будет изображаться точкой, соответствующей времени  $t_j$ , а значения  $x_i(t_j)$  будут координатами этой точки, называемой изображающей. Положение точки, соответствующей моменту времени  $t_j$ , можно также задавать вектором

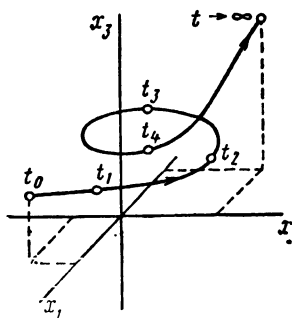


Рис. 5.3

состояния, который направлен из начала координат к изображающей точке; при этом значения  $x_i(t_j)$  будут проекциями вектора на оси  $x_i$ .

Начальные значения переменных  $x_i(t_0)$ , соответствующие моменту времени  $t = t_0$ , изображают начальной точкой или начальным положением вектора состояния. При изменении времени переменные состояния также изменяются, соответственно изображающая точка или конец вектора состояния перемещаются в пространстве состояний, описывая траекторию. Следовательно, траектория представляет геометрическое место концов векторов (годограф) состояния, соответствующих последовательно нарастающим моментам времени. Началом траектории является начальное состояние, а концом — состояние при  $t \rightarrow \infty$ . На рис. 5.3 изображена траектория в трехмерном пространстве состояний ( $n = 3$ ), начинающаяся в точке  $x(t_0)$  (начальное состояние). Изобразив траектории для ряда начальных состояний, получим семейство траекторий.

Время  $t_j$ , указываемое у отдельных точек траектории, является параметром. Когда на траектории указано время, то, взяв проекции точек или векторов, соответствующих моментам  $t_j$ , на координатные оси, получим зависимости всех переменных состояния от времени. Поскольку по известным

решениям, задаваясь значениями  $t_j$ , можно построить траектории, приходим к выводу о том, что имеется *однозначное соответствие между переменными состояниями и изображающей траекторией*.

В случае цепи первого порядка имеем только одно уравнение и одну переменную состояния ( $n = 1$ ). Соответствующее пространство состояний будет одномерным и траекторию изображают на прямой  $x$ . Для цепи второго порядка получим два уравнения и две переменные состояния  $x_1$  и  $x_2$  ( $n = 2$ ). Пространство состояний будет двумерным и превратится в плоскость состояний с координатами  $x_1$  и  $x_2$ . Траектория на плоскости состояний представляет кривую зависимости между двумя переменными. При  $n = 3$  получим трехмерное пространство с координатами  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ . Здесь, очевидно, построение траекторий на плоском чертеже исключается — можно лишь построить траектории в отдельных плоских сечениях. Но и для  $n \geq 3$ , т. е. для цепи высокого порядка, полезно для наглядности представлять процессы в виде перемещения изображающей точки или вектора состояния по траектории в обобщенном многомерном пространстве состояний.

Следует отметить, что траектории сохраняют свою форму и не зависят от времени, если уравнения состояний не содержат в явном виде времени.

Наряду с наглядным геометрическим представлением решений уравнений состояния траектории в пространстве состояний используют как метод анализа свободных колебаний систем с независимыми от времени параметрами. Этот метод рассмотрен в следующей главе, где более подробно изложено построение траекторий.

### § 5.3. Составление уравнений состояния электрической цепи

Задача состоит в том, чтобы получить систему уравнений состояния, которая связывает переменные — заряды (напряжения) емкостей и потокосцепления (токи) индуктивностей. Эта система должна удовлетворять следующим условиям: 1) уравнения должны быть независимыми; 2) в уравнения должны войти только переменные состояния и источников; остальные переменные должны быть выражены через переменные состояния; 3) в левую часть каждого уравнения должна войти первая производная одной из переменных состояний; в правой части не должно быть производных.

В уравнения равновесия напряжений в выбранных независимых контурах и токов в выбранных сечениях должны вой-

ти напряжения (заряды) всех емкостей и источников напряжения, а также токи (потокосцепления) всех индуктивностей и источников тока. Чтобы выполнить это условие, необходимо выбрать соответствующее дерево графа цепи. В качестве ветвей дерева должны быть выбраны емкости и источники напряжений, а в качестве ветвей связи (хорд) — индуктивности и источники тока; за недостающие ветви дерева и ветви связи принимают резистивные элементы или ветви. Указанный выбор дерева в принятом предположении отсутствия контуров из емкостей и сечений из индуктивностей всегда возможен.

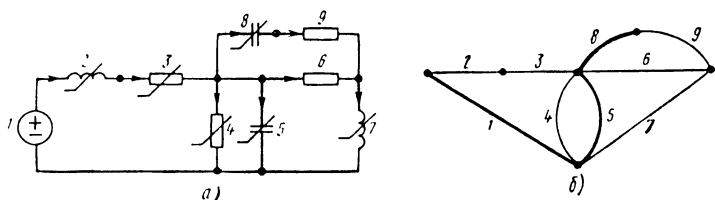


Рис. 5.4

Выбор главных сечений и контуров и составление уравнений проиллюстрируем на примере конкретной цепи. На рис. 5.4, а изображена цепь, составленная из двухполюсных  $RLC$ -элементов. Цепь имеет  $n_y = 6$  узлов  $n_b = 9$  ветвей из емкостей ( $n_C = 2$ ), индуктивностей ( $n_L = 2$ ), резистивных элементов ( $n_R = 4$ ) и источника напряжения ( $n_u = 1$ ). Пусть характеристики резистивных элементов заданы в виде функций:

$$u_3 = \varphi_3(i_3); \quad u_4 = R_6 i_6;$$

$$i_6 = \varphi_4(u_4); \quad u_9 = R_9 i_9,$$

а характеристики индуктивностей и емкостей:

$$i_2 = \varphi_2(\Psi_2); \quad u_5 = \varphi_5(q_5);$$

$$i_7 = \varphi_7(\Psi_7); \quad u_8 = \varphi_8(q_8).$$

Переменными состояниями будут заряды емкостей  $q_5$ ,  $q_8$  или напряжения  $u_5$ ,  $u_8$  и потокосцепления индуктивностей  $\Psi_2$ ,  $\Psi_7$  или токи  $i_2$ ,  $i_7$ .

Число ветвей дерева равно  $n_{вд} = n_y - 1 = 5$ . В качестве обязательных ветвей дерева принимаем ветви 1, 5 и 8 источника и двух емкостей, которые показаны жирными линиями на графе цепи (рис. 5.4, б). В качестве недостающих двух ветвей дерева следует принять резистивную цепь 3 и одну из двух резистивных ветвей: 6 или 9. На рис. 5.5, а показано де-



рево, где в качестве последней ветви принята ветвь 6. Как видно, имеется некоторая свобода в выборе дерева в случаях, когда число емкостных ветвей и источников меньше числа ветвей дерева. Выбор недостающих ветвей дерева должен производиться с учетом того, в каком виде —  $u(i)$  или  $i(u)$  — задана характеристика нелинейной резистивной ветви.

После выбора дерева следует наметить соответствующие главные сечения и контуры и приступить к записи уравнений равновесия токов и напряжений. На рис. 5.5, а, б показаны

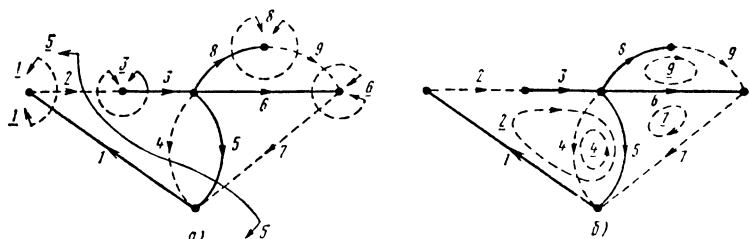


Рис. 5.5

главные сечения и контуры, соответствующие выбранному дереву рассматриваемой цепи.

Запись уравнений равновесия токов необходимо начать с главных сечений, содержащих емкостные ветви. Ток емкостной ветви дерева, входящей только в одно (свое) сечение, равен производной от заряда  $dq_i/dt$ . Этот ток записывается в левой части уравнения: в правую часть войдут токи индуктивных и резистивных ветвей связи и источников тока. Уравнения равновесия токов главных сечений, относящихся к неемкостным ветвям, дадут соотношения, необходимые для исключения токов резистивных ветвей связи.

Для показанных на рис. 5.5, а пяти главных сечений получим уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \text{сечение 5: } dq_5/dt &= i_2 - i_7 - i_4; \\ \text{сечение 8: } dq_8/dt &= i_9; \\ \text{сечения 1 и 3: } i &= i_5 = i_2; \\ \text{сечение 6: } i &= i_7 - i_9. \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

Запись уравнений равновесия напряжений начнем с главных контуров, содержащих индуктивные ветви связи. Напряжение индуктивной ветви связи, входящей только в один (свой) контур, равно производной от потокосцепления  $d\Psi_i/dt$ . Это напряжение следует записать в левой части уравнения;

в правой записываются напряжения емкостных и резистивных ветвей дерева и источников напряжения. Уравнения равновесия напряжений главных контуров, не содержащих индуктивных ветвей связи, дадут соотношения, необходимые для исключения напряжений резистивных ветвей дерева. Для показанных на рис. 5.5, б четырех главных контуров получим уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \text{контур 2: } u_2 &= d\Psi_2/dt = -u_5 - u_3 + u_1; \\ \text{контур 7: } u_7 &= d\Psi_7/dt = u_5 - u_6; \\ \text{контур 9: } u_9 &= -u_8 + u_6; \\ \text{контур 4: } u_4 &= u_5. \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

Заключительный этап состоит в получении из уравнений равновесия токов в главных сечениях и напряжений в главных контурах искомым уравнений состояния. Для этого необходимо:

1) выбрать уравнения, содержащие токи емкостных ветвей и напряжения индуктивных ветвей и исключить из них переменные: напряжения и токи всех резистивных ветвей;

2) выразить токи индуктивностей через потокосцепления и напряжения емкостей через заряды, если в качестве переменных выбраны  $\Psi_i$  и  $q_i$ :

$$\left. \begin{aligned} i_i &= i_i(\Psi_i); \\ u_i &= u_i(q_i). \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

В случае линейных индуктивностей и емкостей

$$\left. \begin{aligned} i_i &= \Psi_i/L_i; \\ u_i &= q_i/C_i. \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

Наиболее трудным является исключение из выбранных уравнений напряжений и токов всех резистивных ветвей. Для этого указанные переменные следует выразить через напряжения емкостей и токи индуктивностей. Требуемые выражения можно найти, если решить уравнения главных сечений, не содержащих емкостных ветвей, и уравнения главных контуров, не содержащих индуктивных ветвей, относительно напряжений и токов резистивных элементов.

Для рассматриваемой цепи рис. 5.4, а, описываемой системами (5.12) и (5.13), уравнениями состояния являются первые пары уравнений. Из них должны быть исключены переменные  $i_4$ ,  $i_9$ ,  $u_3$  и  $u_6$ , относящиеся к резистивным элементам. Чтобы выразить эти переменные через выбранные переменные состоя-

ния  $i_2$ ,  $i_7$ ,  $u_5$  и  $u_8$ , необходимо использовать последние три уравнения системы (5.12) и последние два уравнения системы (5.13).

Для облегчения процесса исключения переменных резистивных ветвей, систематизации и придания наглядности отдельным этапам применяют составление уравнений состояния по схемам замещения путем разбиения заданной цепи на две подцепи: 1) из элементов, запаасающих энергию; 2) из резистивных элементов и внешних источников.

При изложении способа составления уравнений состояния по схемам замещения целесообразно повторить некоторые наи-

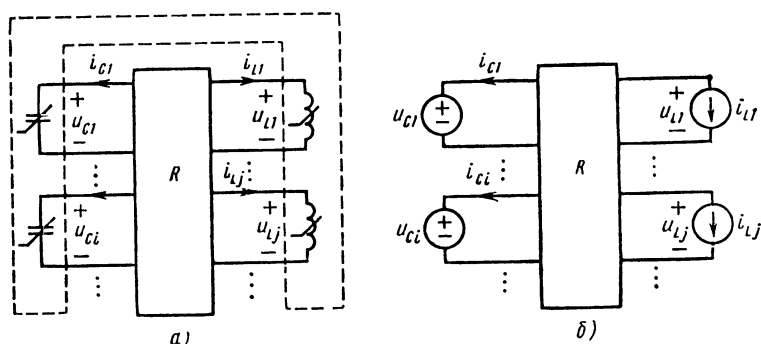


Рис. 5.6

более существенные общие положения, которые частично приведены ранее и на которых основаны отдельные этапы составления уравнений.

Пусть задана цепь, содержащая наряду с элементами, запаасающими энергию, резистивные элементы и источники постоянных и переменных сигналов. Для составления уравнений при выборе зарядов емкостей и потокосцеплений индуктивностей в качестве переменных состояния разобьем цепь на две подцепи, содержащие: 1) только элементы, запаасающие энергию; 2) резистивные элементы и источники, как управляемые, так и независимые. На рис. 5.6, а первая подцепь представлена в виде выведенных наружу и заключенных в пунктир индуктивных и емкостных элементов; вторая с резистивными элементами и источниками изображена в виде прямоугольника.

В уравнения первого порядка должны войти только заряды  $q_{C_i}$  (напряжения  $u_{C_i}$ ) емкостей и потокосцепления  $\Psi_{L_j}$  (токи  $i_{L_j}$ ) индуктивностей, причем в левой части окажутся первые производные от указанных переменных.

Первыми производными зарядов являются токи емкостей, текущие через выводы резистивной подцепи, к которым присоединены емкостные элементы:

$$i_{Ci} = dq_i/dt \quad (i = 1, 2, \dots, n_c). \quad (5.16)$$

Первыми производными потокосцеплений являются напряжения на выводах резистивной подцепи, к которым присоединены индуктивные элементы:

$$u_{Lj} = d\Psi_j/dt \quad (j = n_c + 1; n_c + 2, \dots, n). \quad (5.17)$$

Для составления искомых уравнений состояния необходимо выразить токи  $i_{Ci}$  и напряжения  $u_{Lj}$  всех выводов  $n$ -полюсной резистивной подцепи, к которым присоединены емкостные и индуктивные элементы, через выбранные переменные состояния  $q_{Ci}$  ( $u_{Ci}$ ) и  $\Psi_{Lj}$  ( $i_{Lj}$ ). Соответственно составление уравнений состояния сводится к определению выражений входных токов выводов, к которым присоединены емкости, и входных напряжений выводов, к которым присоединены индуктивности, через принятые в качестве переменных состояния напряжения и токи тех же выводов.

Указанная постановка задачи эквивалентна следующей: производится замена всех емкостей источниками напряжений  $u_i$  (или источниками зарядов  $q_i$ ) и всех индуктивностей — источниками тока  $i_j$  (или источниками потокосцеплений  $\Psi_j$ ), как показано на рис. 5.6, б. В результате получается подключенная к  $n$  источникам резистивная цепь, содержащая кроме резисторов заданные независимые, а также управляемые источники сигнала. Для этой схемы требуется выразить входные токи выводов, к которым присоединены источники напряжения, замещающие емкости, и входные напряжения выводов, к которым присоединены источники тока, замещающие индуктивности, через переменные всех источников. Как видим, задача составления уравнений состояния свелась к задаче определения выражений входных токов и напряжений  $n$ -полюсной резистивной цепи через напряжения и токи присоединенных к входам источников.

Переход к эквивалентной резистивной цепи с  $n$  источниками напряжения и тока, представляющими принятые переменные состояния, позволяет сделать важный вывод о полноте системы переменных. Как было показано в гл. 2, из анализа резистивной цепи, изображенной на рис. 5.6, б, всегда можно найти напряжения и токи всех ветвей. Следовательно, принятая система переменных состояния — напряжений емкостей и токов индуктивностей — обладает полнотой: она позволяет

найти токи всех ветвей, т. е. полностью определяет поведение электрической цепи.

Составим уравнения состояния цепи рис. 5.4, *a* на основе схемы замещения с источниками. После замены емкостей источниками напряжения и индуктивностей источниками тока получим схему замещения, которая изображена на рис. 5.7. Резистивная подцепь, включая источник внешнего воздействия, заключена в пунктирный прямоугольник.

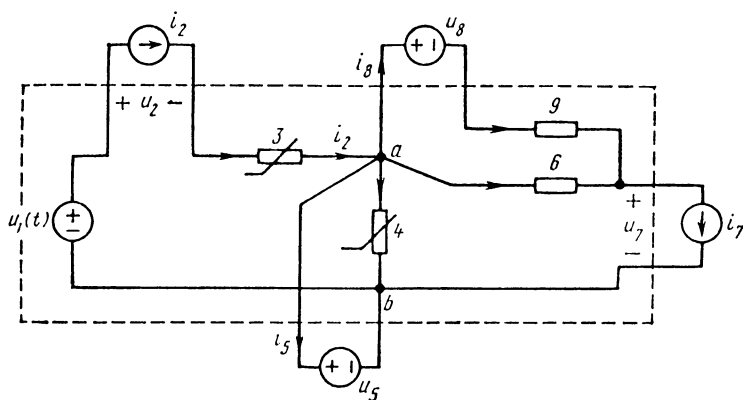


Рис 5 7

В соответствии с высказанным положением о составлении уравнений состояния по схемам замещения необходимо выразить в явном виде зависимость напряжений источников тока  $i_2$  и  $i_7$  и токов источников напряжения  $u_7$  и  $u_8$  от токов и напряжений всех источников, включая внешний источник  $u_1(t)$ . Поскольку источник напряжения  $u_5$  определяет напряжение между узлами  $a-b$ , участки цепи слева и справа от этих узлов можно рассматривать независимо. Напряжение ветви 4  $u_1 = u_5$ . Для левой части цепи имеем  $i_3 = i_2$  и искомое напряжение источника тока

$$u_2 = -u_5 - u_3 + u_1(t) = -u_5 - \varphi_3(i_2) + u_1(t). \quad (5.18)$$

Действие левой части цепи на правую можно учесть током источника тока. Ток источника напряжения  $u_5$  можно сразу записать из условия равновесия токов в узле

$$i_5 = i_2 - i_7 - i_4 = i_2 - i_7 - \varphi_4(u_5). \quad (5.19)$$

Ток источника напряжения  $u_8$  записывается через переменные остальных источников:

$$\left. \begin{aligned} i_8 + i_6 - i_7 &= 0; \\ u_8 + R_9 i_8 - R_6 i_6 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Исключив из этой системы ток  $i_6$ , получим

$$i_8 = \frac{1}{R_6 + R_9} (R_6 i_7 - u_8). \quad (5.20)$$

Напряжение источника тока  $i_7$  с учетом этого выражения

$$u_7 = u_5 - u_8 - R_9 i_8 = \frac{R_6 R_9}{R_6 + R_9} i_7 + u_5 - \frac{R_6 u_8}{R_6 + R_9}. \quad (5.21)$$

В левых частях уравнений (5.18)—(5.21) необходимо заметить напряжения источников тока, представляющих индуктивности, производными от потокосцеплений и токи источников напряжения, представляющих емкости, производными от зарядов, а в правых частях токи индуктивностей — потокосцеплениями, а напряжения емкостей — зарядами. В результате искомую систему уравнений состояния запишем в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Psi_2}{dt} &= -\varphi_3[\varphi_2(\Psi_2)] - \varphi_5(q_5) + u_1(t); \\ \frac{dq_5}{dt} &= \varphi_2(\Psi_2) - \varphi_7(\Psi_7) - \varphi_4[\varphi_5(q_5)]; \\ \frac{d\Psi_7}{dt} &= -\frac{R_6 R_9}{R_6 + R_9} \varphi_7(\Psi_7) + \varphi_5(q_5) - \frac{R_6}{R_6 + R_9} \varphi_8(q_8); \\ \frac{dq_8}{dt} &= \frac{1}{R_6 + R_9} [R_6 \varphi_7(\Psi_7) - \varphi_8(q_8)]. \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

Если система уравнений состояния решена и найдены напряжения и токи источников схемы рис. 5.7, то токи и напряжения ветвей резистивной подцепи всегда могут быть определены.

Обобщая рассмотренный пример на случай нелинейной цепи  $n$ -го порядка, можно записать уравнения состояния в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} dq_j/dt &= i_j(q_1, q_2, \dots, \Psi_1, \Psi_2, \dots, t) \quad (j = 1, 2, \dots, n_c); \\ d\Psi_k/dt &= u_k(q_1, q_2, \dots, \Psi_1, \Psi_2, \dots, t) \quad (k = n_c + 1; n_c + 2; \\ &\quad \dots; n), \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

где  $i_j$  и  $u_k$  — входные ток и напряжение выводов  $j$  и  $k$  резистивной подцепи с  $n$  входами, к которым присоединены емкости и индуктивности.

Если заряды емкостей выражены через напряжения и потокосцепления индуктивностей — через токи

$$\begin{aligned} q_j &= q_j(u_j); \\ \Psi_k &= \Psi_k(i_k), \end{aligned} \quad (5.24)$$

то можно перейти к напряжениям емкостей и токам индуктивностей, записав производные от зарядов и потокосцеплений таким образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_j}{dt} &= \frac{dq_j}{du_j} \cdot \frac{du_j}{dt} = C_j(u_j) \frac{du_j}{dt}; \\ \frac{d\Psi_k}{dt} &= \frac{d\Psi_k}{di_k} \cdot \frac{di_k}{dt} = L_k(i_k) \frac{di_k}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

где  $C_j(u_j) = dq_j/du_j$  и  $L_k(i_k) = d\Psi_k/di_k$  — динамические емкость и индуктивность.

Уравнения состояния (5.23) при учете (5.25) можно представить как

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_j}{dt} &= \frac{1}{C_j(u_j)} i_j(u_1, u_2, \dots, i_1, i_2, \dots, t); \\ \frac{di_k}{dt} &= \frac{1}{L_k(i_k)} u_k(u_1, u_2, \dots, i_1, i_2, \dots, t). \end{aligned} \right\}$$

Какие характеристики выбрать в качестве переменных состояния — заряд или напряжение для нелинейных емкостных элементов, потокосцепление или ток для нелинейных индуктивных элементов, зависит от вида характеристик.

Если характеристика емкостного элемента  $q(u)$  немонотонна и управляется напряжением, то за переменную состояния следует принять напряжение; если же немонотонная характеристика  $u(q)$  управляется зарядом, то заряд емкости. Для индуктивного элемента с немонотонной характеристикой: если  $\psi(i)$  управляется током, то переменной состояния должен быть ток, если же характеристика  $i(\psi)$  управляется потокосцеплением, то потокосцепление.

В случае строго монотонных характеристик в качестве переменных состояния можно принимать как напряжения емкостных элементов и токи индуктивных элементов, так и их заряды и потокосцепления. С точки зрения численных методов решения оказывается более удобным принимать за переменные состояния при монотонных характеристиках заряды емкостных и потокосцепления индуктивных элементов.

## § 5.4. Примеры составления уравнений состояния

Рассмотрим ряд примеров составления уравнений состояния для различных динамических цепей. Начнем с цепей первого порядка и затем перейдем к цепям второго порядка.

Уравнения будем составлять по схемам замещения. Замена в явном виде емкостей и индуктивностей источниками упрощает составление уравнений: источник тока задает токи во всех последовательно соединенных с ним элементах, а источ-

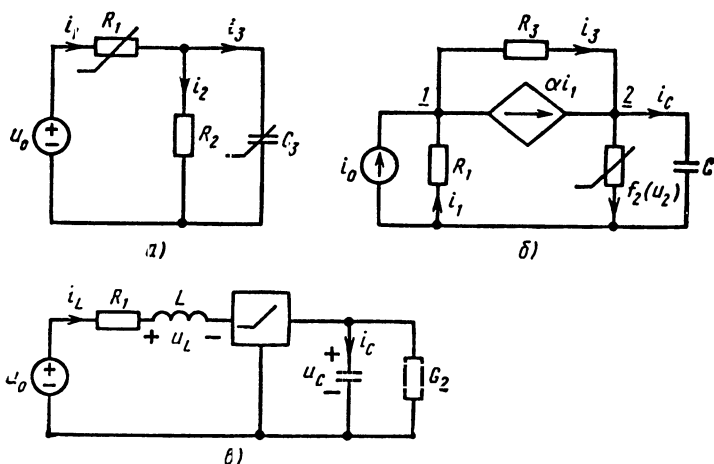


Рис. 5.8

ник напряжения — напряжения на всех параллельно соединенных ветвях. Поэтому иногда удается найти требуемое выражение тока источника напряжения, замещающего емкость, и выражение напряжения источника тока, замещающего индуктивность, из рассмотрения уравнения равновесия напряжений в одном контуре или токов в одном узле.

**Нелинейная цепь первого порядка.** Цепь, состоящая из нелинейного сопротивления  $R_1$ , линейного сопротивления  $R_2$  и нелинейной емкости  $C_3$ , присоединена к источнику напряжения (рис. 5.8, а). Пусть характеристики нелинейных элементов имеют вид

$$\begin{aligned} u_1 &= k_1 i_1^3; \\ q_3 &= k_3 u_3^{1/3}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Заменив емкостный элемент источником напряжения  $u_3 = u_C$ , выразим входной ток резистивной подцепи со стороны



этого источника. Ток в сопротивлении

$$i_2 = u_3/R_2. \quad (5.27)$$

Ток в ветви  $R_1$  можно найти из уравнения равновесия напряжений в левом контуре с учетом (5.26):

$$u_1(i_1) = k_1 i_1^3 = u_0 - u_3.$$

Отсюда

$$i_1 = \left[ \frac{1}{k_1} (u_0 - u_3) \right]^{1/3}. \quad (5.28)$$

Просуммировав (5.27) и (5.28), получим

$$i_3 = -i_2 + i_1 = -\frac{u_3}{R_2} + \left[ \frac{1}{k_1} (u_0 - u_3) \right]^{1/3}$$

Динамическая емкость согласно (5.26) при  $u_3 = u_C$

$$C_3(u_3) = \frac{dq_3}{du_3} = -\frac{1}{3} k_3 u_3^{-2/3}.$$

Уравнение состояния цепи записывается в виде

$$\frac{du_3}{dt} = \frac{i_3}{C_3(u_3)} = \frac{-3}{k_3 R_2} u_3^{5/3} + \frac{3}{k_3} u_3^{2/3} \left[ \frac{1}{k_1} (u_0 - u_3) \right]^{1/3}$$

**Нелинейная цепь первого порядка с управляемым источником.** Цепь, состоящая из двух линейных резистивных элементов  $R_1$ ,  $R_3$ , одного нелинейного элемента  $i_2 = f_2(u_2)$ , управляемого источника тока с током  $\alpha i_1$  и линейной емкости, подключена к источнику тока  $i_0$  (рис. 5.8.б). Ток в емкости ( $u_2 = u_C$ )

$$i_C = i_3 + \alpha i_1 - f_2(u_C).$$

Для исключения токов  $i_1$  и  $i_3$  запишем уравнения по законам токов и напряжений Кирхгофа в узле 1 и в контуре с ветвями  $R_1$ ,  $R_3$  и  $C$ :

$$i_1(1 - \alpha) + i_0 - i_3 = 0;$$

$$R_1 i_1 + R_3 i_3 + u_C = 0.$$

Решение этой системы дает

$$i_1 = -(u_C + R_3 i_0) / [R_1 + R_3(1 - \alpha)];$$

$$i_3 = i_0 - (1 - \alpha)(u_C + R_3 i_0) / [R_1 + R_3(1 - \alpha)]$$

После подстановки значений токов в выражение для  $i_C$  получим уравнение состояния

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} \left[ -f_2(u_C) - \frac{u_C}{R_1 + R_3(1 - \alpha)} + i_0 \left( 1 - \frac{R_3}{R_1 + R_3(1 - \alpha)} \right) \right]$$

Цепь второго порядка с нелинейным трехполюсником. На рис. 5.8, в показана присоединенная к источнику  $u_0$  схема с триодом, двумя линейными реактивными элементами — индуктивностью и емкостью и линейными резистивными элементами  $R_1$ ,  $R_2$ . Из схемы видно, что ток в индуктивном элементе равен входному току триода  $i_L = i_1$ , а напряжение на емкости — напряжению выхода триода  $u_C = u_2$ . Поэтому в качестве переменных резистивного трехполюсника следует принять входной ток и выходное напряжение и характеризовать его гибридными уравнениями

$$u_1 = f_1(i_1, u_2);$$

$$i_2 = f_2(i_1, u_2).$$

Для напряжения  $L$ -элемента и тока  $C$ -элемента имеем

$$u_L = -R_1 i_1 - u_1 + u_0;$$

$$i_C = -G_2 u_2 - i_2.$$

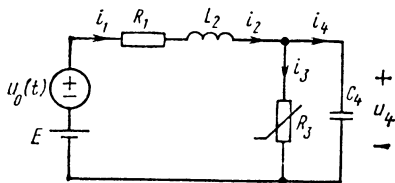


Рис. 5.9

С учетом приведенных соотношений запишем уравнения состояния

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R_1}{L_1} i_L - \frac{1}{L} f_1(i_L, u_C) + \frac{1}{L} u_0;$$

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{C} f_2(i_L, u_C) - \frac{G_2}{C} u_C.$$

Нелинейная цепь второго порядка с туннельным диодом. В качестве примера нелинейной цепи второго порядка рассмотрим схему замещения мультивибратора на туннельном диоде (рис. 5.9). Нелинейный резистивный элемент — туннельный диод — имеет вольт-амперную характеристику  $i_3(u_3)$ ; ее можно приближенно представить в виде полинома (см. § 1.6)

$$i_3 = a_1 u_3 + a_2 u_3^2 + a_3 u_3^3.$$

Параллельно нелинейному элементу  $R_3$  включена линейная паразитная емкость  $C_4$ . Туннельный диод подключен через сопротивление  $R_1$  и индуктивность  $L_2$  к последовательно соединенным источникам напряжения — напряжения смещения  $E$  и переменного сигнала  $u_0(t)$ .

Входное напряжение резистивной подцепи со стороны выводов источника тока, замещающего индуктивность, запишется из условия равновесия напряжений в контуре, включающем внешние источники:

$$u_2 = -R_1 i_2 - u_4 + E + u_0(t).$$

Входной ток резистивной подцепи со стороны выводов источника напряжения, замещающего емкость, запишется из условия равновесия тока в узле, в котором сходятся сопротивление  $\bar{R}_3$  и источники  $u_4$  и  $i_2$ :

$$i_4 = i_2 - i_3(u_4) = i_2 - (a_1 u_4 + a_2 u_4^2 + a_3 u_4^3).$$

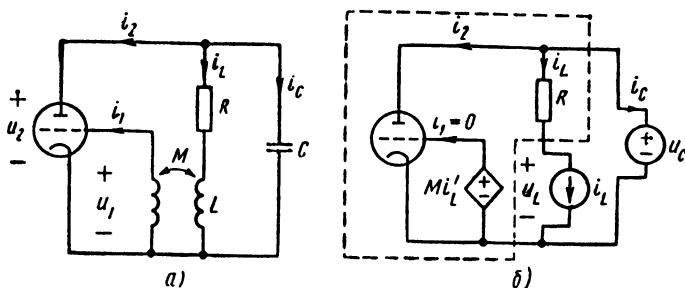


Рис. 5.10

Полученные уравнения можно сразу записать в виде уравнений состояния цепи:

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_2}{dt} &= -\frac{R_1}{L_2} i_2 - \frac{u_4}{L_2} + \frac{1}{L_2} (E + u_0); \\ \frac{du_4}{dt} &= \frac{1}{C_4} i_2 - \frac{1}{C_4} i_3(u_4). \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

Нелинейная цепь второго порядка с ламповым генератором синусоидальных колебаний. На рис. 5.10, а изображена схема для переменных составляющих лампового генератора синусоидальных колебаний с самовозбуждением. Схема состоит из трехполюсного резистивного элемента — триода, параллельного  $LC$ -контура, включенного в цепь анода, и цепи управляющей сетки, связанной с анодным контуром взаимной индуктивностью  $M$ . Сопротивление  $\bar{R}$  учитывает потери в катушке.

Рассмотрим характеристики резистивного трехполюсника (триода). Примем входной (сеточный) ток триода равным нулю:  $i_1 = 0$ . Выходной (анодный) ток  $i_2$  триода зависит от напряжений на сетке  $u_1$  и аноде  $u_2$  относительно катода  $i_2 = i_2 \times (u_1, u_2)$ . Эта зависимость задается анодно-сеточными характеристиками триода (рис. 5.11, а). Наиболее сильно на величину анодного тока влияет сеточное напряжение.

В первом приближении можно пренебречь влиянием на анодный ток лампы анодного напряжения. Аналитически за-

зависимость анодного тока от сеточного напряжения можно представить различными приближениями. Приведем два простейших из них.

При кусочно-линейном приближении (рис. 5.11, б), пригодном в случаях изменения сеточного напряжения в больших пределах, имеем в предположении симметричного смещения

$$i_2 = f(u_1) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & u_1 < -U'; \\ Su_1 & -U' < u_1 < U'; \\ I_s & u_1 > U', \end{array} \right\} \quad (5.30)$$

где  $I_s$  — ток насыщения.

Часто оказывается удобным представление характеристики триода в виде полинома. Для полинома третьей степени можно записать

$$i_2 = f(u_1) = Su_1 + S_1 u_1^3. \quad (5.31)$$

Коэффициент  $S$  в первом слагаемом является крутизной лампы в линейном режиме: второе отрицательное ( $S_1 < 0$ ) слагаемое учитывает отклонение характеристики от линейной.

На рис. 5.10, б приведена схема замещения, полученная при замене емкости источником напряжения и индуктивности — источником тока. Резистивная подцепь включает в себя триод, сопротивление  $R$  и зависимый источник напряжения, управляемый током индуктивности ветви колебательного контура. Этот управляемый источник с напряжением  $M di_L/dt$  учитывает взаимную индуктивность. Такой же источник напряжения, управляемый током сеточной ветви, должен быть включен последовательно с источником тока  $i_L$ . Но поскольку сеточный ток принят равным нулю, этот источник опущен.

Составим уравнения по схеме замещения рис. 5.10, б.

Напряжение на сетке

$$u_1 = -M \frac{di_L}{dt} = -p M i_L, \quad (5.32)$$

где  $p = d/dt$  — оператор дифференцирования по времени.

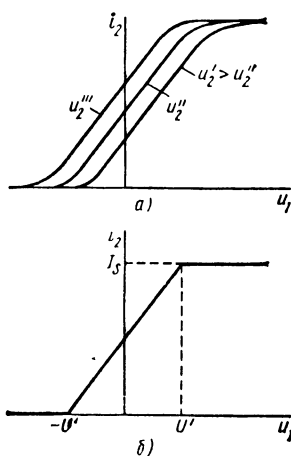


Рис. 5.11

Уравнения равновесия токов в узле и напряжений в контуре цепи запишем в виде:

$$i_2 + i_L + i_C = i_2 + i_L + p C u_C = 0;$$

$$L \frac{di_L}{dt} + R i_L - u_C = (p L + R) i_L - u_C = 0.$$

Исключим из этих уравнений напряжение на емкости

$$i_2 + (p^2 LC + p RC + 1) i_L = 0.$$

Выразив токи анода и катода через напряжение сетки  $i_2 = f(u_1)$  и  $i_L = -u_1 / p M$ , имеем

$$f(u_1) + (p^2 LC + p RC + 1) \frac{u_1}{-p M} = 0.$$

Замена оператора  $p$  производной по времени после приведения выражения к общему знаменателю дает

$$LC \frac{d^2 u_1}{dt^2} + RC \frac{du_1}{dt} - M \frac{df(u_1)}{dt} + u_1 = 0.$$

Перепишем уравнение, введя переменную крутизну — производную от  $f(u_1)$  по напряжению  $S(u_1) = df(u_1)/du_1$ .

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + \omega_0^2 [RC - MS(u_1)] \frac{du_1}{dt} + \omega_0^2 u_1 = 0,$$

где  $\omega_0 = 1/LC$  — резонансная частота.

В случае представления зависимости анодного тока выражением (5.31), допустимым при расположении рабочей точки на линейном участке характеристики (рис. 5.11, а),  $S(u_1) = S + 3S_1 u_1^2$ , где  $S_1 < 0$  и  $0 < u_1 < (S/|S_1|)^{0.5}$ , уравнение получит вид

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + \omega_0^2 (RC - SM - 3S_1 M u_1^2) \frac{du_1}{dt} + \omega_0^2 u_1 = 0.$$

Обозначив

$$a = (SM - RC) \omega_0^2;$$

$$b = -3S_1 M / (SM - RC) = 3 |S_1| \omega_0^2 M / a,$$

запишем уравнение

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} - a(1 - b u_1^2) \frac{du_1}{dt} + \omega_0^2 u_1 = 0. \quad (5.33)$$

Удобно ввести нормированное (относительное) время

$$\tau = \omega_0 t; \quad t = \tau / \omega_0 \quad (5.34)$$

и нормированное напряжение на сетке

$$x = u_1 \sqrt{b}; \quad u_1 = x / \sqrt{b}. \quad (5.35)$$

При подстановке (5.34) и (5.35) в (5.33) получим нормированное уравнение лампового генератора (уравнение Ван-дер-Поля)

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} - \mu (1 - x^2) \frac{dx}{d\tau} + x = 0,$$

где

$$\mu = a/\omega_1 = (SM - RC) \omega_0. \quad (5.36)$$

Если сеточное напряжение определено, то анодный ток можно найти с помощью (5.31).

Положив  $x = x_1$  и  $x_2 = x_1$  из (5.36), получим уравнения состояния лампового генератора в нормальном виде:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_2; \\ x_2 &= -x_1 + \mu (1 - x_1^2) x_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.37)$$

**Нелинейный колебательный контур.** Рассмотрим последовательный колебательный контур из линейных сопротивления и емкости и нелинейной индуктивности с характеристикой  $i(\Psi)$ , присоединенный к источнику напряжения (рис. 5.12). Для подобной простой цепи легко написать уравнения относительно переменных состояния — напряжения на емкости и потокосцепления в индуктивности; ток  $i(\Psi)$  протекает по всем элементам, поэтому для напряжения на индуктивности и тока в емкости имеем

$$u_L = -Ri - u_C + u_0; \quad i_C = i.$$

Уравнения состояния запишем в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Psi}{dt} &= -Ri(\Psi) - u_C + u_0; \\ \frac{du_C}{dt} &= \frac{1}{C} i(\Psi). \end{aligned} \right\}$$

Если, продифференцировав первое уравнение, исключить из него напряжение на емкости, то получим уравнение для потокосцепления

$$\frac{d^2 \Psi}{dt^2} + R \frac{di(\Psi)}{d\Psi} \frac{d\Psi}{dt} + \frac{1}{C} i(\Psi) = u_0'.$$

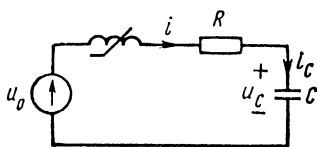


Рис. 5.12

В частном случае аппроксимации нелинейной функции нечетным полиномом третьей степени

$$i = i(\Psi) = a_1 \Psi + a_3 \Psi^3$$

имеем

$$\frac{d^3 \Psi}{dt^3} + R(a_1 + 3a_3 \Psi^2) \frac{d\Psi}{dt} + \frac{1}{C}(a_1 \Psi + a_3 \Psi^3) = u_0. \quad (5.38)$$

При отсутствии потерь первой производной не будет:

$$d^2 \Psi / dt^2 + a_1 \Psi + a_3 \Psi^3 = u_0.$$

В случае контура с нелинейной емкостью, имеющей характеристику в виде полинома

$$u_C = u_C(q) = a_1 q + a_3 q^3,$$

получим уравнение (уравнение Дуффинга)

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_C = L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + a_1 q + a_3 q^3 = u_0. \quad (5.39)$$

## § 5.5. О решении уравнений состояния.

### Состояния равновесия автономных цепей

В предыдущих параграфах было показано, что нелинейная цепь, присоединенная к источникам переменных сигналов, описывается следующей системой уравнений в нормальной форме:

$$dx_i/dt = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; t) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5.40)$$

или при введении вектора столбцовой матрицы функции  $f^t = [f_1, f_2, \dots, f_n]$  (где  $f^t$  — транспонированная матрица)

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \quad (5.41)$$

Предполагается, как указывалось, что время  $t$  появляется в уравнениях только в результате воздействия внешних переменных сигналов — из рассмотрения исключаются цепи, содержащие элементы с переменными во времени параметрами или характеристиками, которые могут также обусловить появление времени в уравнениях.

Цепи, находящиеся под воздействием внешних переменных сигналов и описываемые уравнениями, которые содержат в явном виде время, называются **неавтономными**. Переменные состояния  $x_i$  неавтономных цепей, т. е. решения системы уравнений состояния (5.40), являются всегда функциями времени:  $x_i = x_i(t)$ .

Если к цепи не приложены переменные сигналы, то она называется **автономной**. Автономная цепь может содер-

жать источники постоянного напряжения и тока. Время не входит явно в уравнения состояния автономных цепей, которые будут иметь вид

$$dx_i/dt = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.42)$$

или в матричной форме

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (5.43)$$

Для линейных неавтономных цепей и систем уравнения состояния, как было показано ранее, можно представить в матричной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{e}. \quad (5.44)$$

При отсутствии внешних воздействий:  $\mathbf{e} = 0$  уравнения линейных автономных цепей запишутся в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Для того чтобы показать некоторые особенности решений уравнений нелинейных динамических цепей, рассмотрим два примера простейших автономных цепей первого порядка. Соответствующие нелинейные уравнения первого порядка при действии простейшего постоянного сигнала аналитическое решение будут иметь только в редких случаях специально подобранных характеристик нелинейных элементов.

**Пример 1.** Цепь первого порядка (рис. 5.13, а), состоящая из нелинейного емкостного элемента  $C = 1$  с начальным напряжением  $u_C(0) = U_0$  и нелинейного сопротивления с характеристикой  $i_R = f(u_R)$ . Уравнение цепи

$$C \frac{du_C}{dt} + i_R(u_C) = 0; \quad u_C(0) = U_0 \quad (t > 0).$$

Интегрирование после разделения переменных дает

$$C \int_{U_0}^{u_C} \frac{du_C}{i_R(u_C)} = - \int_0^t dt = -t.$$

В общем случае функция не интегрируется элементарно. В частном случае характеристики резистивного элемента простейшего вида  $i = k u^n$  интеграл легко определяется и для напряжения на емкости при  $n \neq 1$  получаем

$$u_C = [U_0^{1-n} - k(1-n)t/C]^{1/(1-n)}. \quad (5.45)$$

Начальное напряжение входит в выражение реакции сложным нелинейным образом в отличие от линейной цепи, реакция которой



пропорциональна начальному условию: при  $n = 1$  (линейный резистивный элемент) из (5.45) имеем

$$u_C = U_0 e^{-kt/C}.$$

На рис. 5.13, б приведены графики токов при  $k = 1$ ,  $C = 1$  для случая  $n = 3$

$$u_C = (U_0^{-2} + 2t)^{-1/2}$$

при двух значениях начального напряжения  $U_0 = 1$  и  $U_0 = 2,5$ . Времена спада до  $0,5U_0$  равны:  $t' = 1,5$  и  $t'' = 0,25$ .

**Пример 2.** Включение цепи из последовательно-соединенных линейной индуктивности с нулевым начальным током и нелинейного сопротивления с характеристикой  $u = u(i)$  к источнику напряжения  $U$  (рис. 5.14, а).

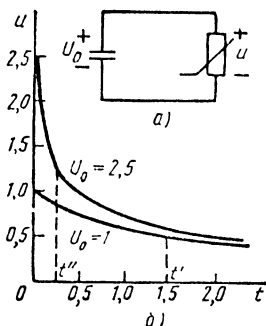
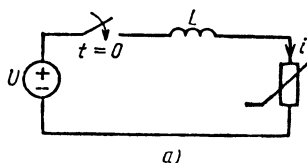


Рис. 5.13

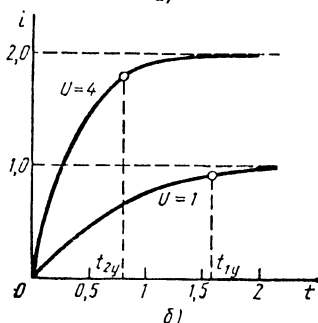


Рис. 5.14

Уравнение равновесия напряжений

$$L \frac{di}{dt} + u(i) = U \quad (t > 0).$$

Разделив переменные, проинтегрируем уравнение

$$\int_0^i \frac{di}{-u(i) + U} = \frac{1}{L} t.$$

Задавшись характеристикой резистивного элемента

$$u(i) = ki^2,$$

при которой интеграл выражается через элементарные функции, получим

$$\frac{1}{k} \int_0^i \frac{di}{-i^2 + U/k} = \frac{1}{\sqrt{kU}} \operatorname{Arth}(i/\sqrt{U/k}) = \frac{t}{L}.$$

Отсюда для тока имеем

$$i = \sqrt{U/k} \operatorname{th}(\sqrt{kU} t/L).$$

Напряжение источника в выражение реакции входит также нелинейно. На рис. 5.14, б даны графики изменения тока при  $k = 1$ ,  $L = 1$  и двух значениях напряжения на входе:  $U = 1$  и  $U = 4$ . Как видно, установившееся значение тока при возрастании сигнала в четыре раза увеличилось только в два раза, при этом время достижения током значения  $0,9i_y$  уменьшилось почти в два раза.

Приведенные примеры показывают также, что аналитическое решение даже простейших нелинейных уравнений автономных цепей с двумя элементами возможно только в очень редких случаях специально подобранных характеристик элементов.

Решение систем нелинейных дифференциальных уравнений представляет весьма сложную задачу. Как правило, *точное решение* уравнений нелинейных цепей в аналитической форме за исключением простейших частных случаев, *невозможно*. Существующие в настоящее время общие методы анализа нелинейных динамических цепей можно подразделить на качественные и приближенные количественные методы.

Основная цель качественного анализа состоит в том, чтобы *без получения решения уравнения выявить наиболее важные характерные особенности процессов в цепи и влияние на них параметров и характеристик элементов*. Очень важно выяснить возможность появления незатухающих колебаний в автономной цепи, определить состояния равновесия, их устойчивость или неустойчивость, установить влияние начальных условий на характер процессов и т. д. Качественный анализ имеет исключительно важное значение для проектирования нелинейных цепей и устройств.

К качественным методам можно отнести *метод построения траекторий* решения уравнений в пространстве состояний (метод фазового пространства). Метод траекторий практически применим только к автономным цепям первого и второго порядков.

К приближенным количественным методам относятся *численный, кусочно-линейный и графический методы решения уравнений*. Эти методы дают решения уравнений для заданных в численном виде конкретных значений элементов и их характеристик.

*Численные методы* позволяют с помощью ЦВМ получить решение любого числа уравнений состояния. Они используют алгоритмы приближенного численного интегрирования дифференциальных уравнений, которые сводят решение уравнений к конечному числу арифметических операций. Численные

методы применимы к системам уравнений, имеющим единственное решение.

*Кусочно-линейный метод*, основанный на замене нелинейных характеристик кусочно-линейным представлением, приводит к линеаризации цепи. При каком-то определенном сочетании отдельных линейных участков характеристик элементов для анализа можно использовать аппарат теории линейных цепей. При переходе к другому сочетанию следует согласовывать или, как говорят, припасовывать значительные условия на элементах, запасующих энергию, в соответствии с условиями непрерывности зарядов емкостей и потоков сцеплений индуктивностей. Этот метод весьма эффективен и применим для анализа очень широкого класса нелинейных цепей.

При анализе (особенно при качественном) автономных цепей огромную роль играют так называемые *состояния равновесия*. Состояния равновесия — это те значения переменных, которые определяют *конечные* или *установившиеся значения* напряжений и токов в автономной цепи. Исследование процессов в автономной цепи следует начинать с нахождения состояний равновесия.

Состоянием равновесия автономной цепи, т. е. цепи без воздействия внешнего сигнала, зависящего от времени, называют те значения переменных  $x_{i0}$ , при которых обращаются в нуль одновременно все производные по времени:

$$dx_i/dt = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (5.46)$$

Равенство нулю скоростей изменения во времени всех переменных состояния означает, что они не изменяются во времени, т. е. принимают *постоянные значения*:  $x_i = x_{i0}$ .

Указанным постоянным значениям переменных состояния соответствует определенная точка в пространстве состояний. Поэтому состояния равновесия называют также *точками равновесия*.

Из (5.46) следует, что должны быть приравнены нулю правые части системы уравнений состояния автономной цепи:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (5.47)$$

Этой системе  $n$  нелинейных функциональных уравнений должны удовлетворять состояния равновесия  $x_{i0}$ . Чтобы найти значения состояний равновесия, необходимо решить систему (5.47).

Как было показано в гл. 2, определение рабочих точек характеристики резистивной цепи также сводится к решению системы функциональных уравнений вида (5.47), так что задача нахождения состояний равновесия автономной цепи может ре-

шаться методами анализа резистивных цепей, в частности графическим методом.

Легко получить вид резистивной цепи, соответствующей системе уравнений (5.47). Согласно (5.46), в точках равновесия автономной цепи все производные по времени от переменных состояния, т. е. от зарядов (напряжений) емкостей и потоко-сцеплений (токов) индуктивностей, равны нулю. Следовательно, заряды емкостей и потоко-сцепления индуктивностей являются постоянными величинами, и цепь находится в режиме постоянного тока.

В режиме постоянного тока токи емкостных и напряжения индуктивных элементов равны нулю, это эквивалентно разрыву емкостей и короткому замыканию индуктивностей.

Таким образом, *схема замещения для определения точек равновесия получается из заданной динамической цепи путем разрыва всех емкостей и короткого замыкания всех индуктивностей*. В результате получается цепь из резистивных элементов, питаемая от источников постоянного напряжения и тока, т. е. обычная нелинейная цепь постоянного тока, в которой напряжения и токи всех элементов являются постоянными величинами. Анализ этой цепи с целью определения состояний равновесия сводится к вычислению напряжений  $u_{j0}$  на разомкнутых выводах емкостей и токов  $i_{k0}$  короткозамкнутых выводов индуктивностей. При этом следует воспользоваться методами, приведенными в гл. 2. По известным значениям  $u_{j0}$  и  $i_{k0}$ , которые являются напряжениями и токами источников постоянного напряжения и тока, и характеристикам емкостных и индуктивных элементов определяют заряды  $q_{j0}$  и потоко-сцепления  $\Psi_{k0}$ , соответствующие точкам равновесия.

В общем случае, как указывалось в гл. 2, система функциональных уравнений (5.47) может иметь не одно решение. Это означает, что *нелинейная цепь может иметь несколько состояний или точек равновесия*.

В случае линейной автономной цепи схема замещения для определения состояний равновесия состоит из линейных резистивных элементов и источников постоянного напряжения и тока. Такая цепь имеет единственное решение — напряжения и токи всех ветвей, в том числе каждое искомое состояние равновесия имеет одно значение. Следовательно, для *линейной цепи имеем только одну точку равновесия* в пространстве состояний. Если линейная автономная цепь не имеет источников постоянного напряжения и тока, то реакции в резистивной подцепи и, следовательно, все переменные состояния равновесия равны нулю и точка равновесия расположится в начале координат.

Рассмотрим в качестве примера точки равновесия схемы на туннельном диоде (см. рис. 5.9), в которой учтены параллельная емкость и последовательная индуктивность. Приравняв нулю производные по времени от переменных состояния — тока индуктивности  $i_2$  и напряжения емкости  $u_4$  в уравнениях состояния (5.29), а также внешнее воздействие, получим систему из двух функциональных уравнений

$$\left. \begin{aligned} u_4 &= E - R_1 i_2; \\ i_2 &= i_3(u_4). \end{aligned} \right\}$$

Эта система соответствует резистивной цепи, полученной при коротком замыкании индуктивности и разрыве емкости. Первое уравнение прямой представляет характеристику подцепи из источника смещения и линейного резистора, а второе — характеристику диода. Графическое решение полученной системы уравнений для определения рабочих точек смещения было дано в § 2.9, где показано, что при некоторых соотношениях параметров имеются три решения, т. е. три точки равновесия — на первом и втором нарастающем участках и спадающем участке характеристики диода. Если характеристика диода представлена аналитически, например, полиномом третьей степени, то точки равновесия можно определить из решения кубического уравнения

$$E - R_1 i_3(u_4) = E - R_1 (a_1 u_4 + a_2 u_4^2 + a_3 u_4^3) = 0.$$

Решение можно получить только при численном задании всех коэффициентов.

## § 5.6. Об устойчивости состояний равновесия

Нормальная работа цепи или системы возможна только тогда, когда заданный режим является устойчивым. Поэтому выяснение вопросов устойчивости имеет первостепенное значение для проектирования цепей и систем.

Анализ устойчивости нелинейных цепей, так же как анализ их режимов, представляет весьма трудную задачу. В данном параграфе ограничимся введением некоторых важных понятий устойчивости только для автономной цепи, т. е. в свободном режиме, когда нет внешнего возмущения. Режим автономной цепи определяется *начальными условиями*. Устойчивость режимов нелинейной автономной цепи также зависит от начальных условий. Различают два вида устойчивости — *устойчивость в малом и в большом*. В первом случае амплитуда возмущения, вызванного изменением начальных условий,

предполагается малой и исследуется устойчивость состояния равновесия. Во втором случае амплитуда возмущения вследствие изменения начальных условий предполагается относительно большой и исследуется устойчивость соответствующего режима.

Исследование устойчивости в большом фактически означает анализ нелинейной цепи при любых начальных условиях. Здесь не будем касаться этого сложного вопроса, приведем элементарное изложение только вопроса устойчивости в малом состоянии равновесия автономных цепей.

Элементарное интуитивное представление об устойчивости состояния равновесия можно получить путем наблюдения

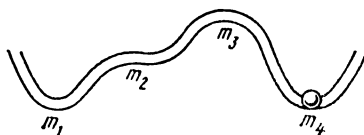


Рис. 5.15

за характером процесса, вызванного приложением к системе

возмущения в виде импульсного сигнала небольшой амплитуды. Если при действии такого возмущения в системе возникают силы, которые стремятся вернуть ее в исходный режим, то состояние равновесия устойчиво. Если же в системе возникают силы, стремящиеся вывести ее из исходного режима, то состояние равновесия неустойчиво.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим простейшую механическую систему из тяжелого шара, лежащего в желобе (рис. 5.15).

Желоб изогнут так, что линия изгиба имеет чередующиеся вогнутые и выпуклые участки. Точки  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  и  $m_4$ , в которых производные от линии изгиба равны нулю, очевидно, являются точками равновесия. Легко убедиться, что точки  $m_1$  и  $m_4$  являются точками устойчивого равновесия — при небольшом отклонении от указанных точек потенциальная энергия возрастает и шар будет стремиться вернуться в исходное состояние равновесия, где потенциальная энергия имеет наименьшее значение. Точки же  $m_2$  и  $m_3$  являются точками неустойчивого равновесия — при небольшом отклонении от них потенциальная энергия уменьшается и шар будет удаляться от исходного состояния равновесия.

В приведенном примере определения устойчивости в малом амплитуды возмущений должны быть небольшими, чтобы система не перешла в режим с другими точками равновесия. С приложением больших возмущений, соответствующих устойчивости в большом, указанный переход становится возможным.

Если предположить, что в рассматриваемой системе отсутствует трение, то, очевидно, шар будет совершать около

точки равновесия незатухающие колебания с небольшой амплитудой. Аналогичное положение может иметь место и в других системах. Если к автономной системе, находящейся в состоянии устойчивого равновесия, приложить малое возмущение путем внезапного изменения начальных условий, то амплитуда колебаний будет малой и не превысит некоторого предельного значения, зависящего от начального возмущения. Характерным для такого режима является то, что амплитуды колебаний около точки равновесия остаются ограниченными — малыми, если приложены ограниченные также малые возмущения. Если исследуемая точка равновесия обладает указанным свойством, то говорят, что она *устойчива в малом*, или *устойчива по Ляпунову*.

В примере шара в желобе, очевидно, из-за наличия потерь (трения) колебания будут затухать и при  $i \rightarrow \infty$  шар вернется в исходное состояние равновесия. Если точка равновесия обладает аналогичным свойством, т. е. возникшие после приложения малого начального возмущения малые колебания исчезают при  $i \rightarrow \infty$  и режим возвращается в исходное состояние, то говорят, что она *асимптотически устойчива*.

Дадим более строгие математические определения устойчивости. Устойчивость в малом (по Ляпунову) формулируют таким образом: *состояние равновесия системы устойчиво, если для любой положительной величины  $\epsilon$  существует другая положительная величина  $\delta$  (зависящая только от  $\epsilon$ ), такая, что начальное отклонение состояния на величину  $|x - x_0| < \delta$  приводит к тому, что для всех моментов  $i > i_0$  отклонение состояния  $|x - x_0|$  остается меньше  $\epsilon$ .*

Асимптотическую устойчивость в малом формулируют так: *состояние равновесия автономной системы асимптотически устойчиво, если оно устойчиво по Ляпунову, и кроме того, существует положительное число  $\delta_a$  такое, что при любом начальном отклонении  $|x - x_0| < \delta_a$  переменная сходится к  $x_0$  при  $i \rightarrow \infty$ .*

В следующей главе будет дана наглядная геометрическая интерпретация приведенных определений устойчивости в малом с помощью траекторий решений уравнений в пространстве состояний.

Установить устойчивость в малом состоянии равновесия нелинейных автономных систем можно по упрощенным линеаризованным в окрестности исследуемой точки уравнениям. Такая возможность вытекает из следующей очень важной теоремы А. М. Ляпунова, которую приведем без доказательства. Если характеристический полином линеаризованной системы уравнений имеет: 1) корни только с вещественными отрицатель-





$$\Delta = \begin{vmatrix} (a_{11} - p) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - p) & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - p) \end{vmatrix} \quad (5.49)$$

Для установления устойчивости необходимо раскрыть определитель и к коэффициентам характеристического полинома применить один из критериев устойчивости линейных систем: критерий Гурвица, Рауса или частотные критерии. Как известно, для уравнений первого и второго порядков необходимое и достаточное условие устойчивости состоит в положительности коэффициентов характеристического полинома.

Рассмотрим пример оценки устойчивости состояний равновесия в цепи туннельного диода с учетом последовательной индуктивности и параллельной емкости (см. рис. 5.9). Для одной из трех точек равновесия линеаризация системы (5.24), которой описывается рассматриваемая цепь, дает (при  $u_c = 0$ ) уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \Delta i_2}{dt} &= -\frac{R_1}{L_2} \Delta i_2 - \frac{1}{L_2} \Delta u_4 = a_{11} \Delta i_2 + a_{12} \Delta u_4; \\ \frac{d \Delta u_4}{dt} &= \frac{1}{C_4} \Delta i_2 - \frac{1}{C_4} \left[ \frac{di_3(u_4)}{du_4} \right]_0 \Delta u_4 = a_{21} \Delta i_2 + a_{22} \Delta u_4, \end{aligned} \right\}$$

где  $k = [di_3(u_4)/du_4]$  — угловой коэффициент касательной к характеристике диода в точке равновесия

Согласно (5.49) характеристический полином

$$\Delta = p^2 - p(a_{11} + a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}). \quad (5.50)$$

Для устойчивости необходимо, чтобы в точках равновесия коэффициенты полинома не принимали отрицательных значений:

$$\begin{aligned} -(a_{11} + a_{22}) &= \left( \frac{R_1}{L_2} + \frac{k}{C_4} \right) \geq 0; \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} &= \frac{1}{L_2 C_4} (R_1 k + 1) \geq 0 \end{aligned}$$

Если точка равновесия располагается на нарастающих участках характеристики, то угловой коэффициент  $k = 1/r_d$  ( $r_d$  — динамическое сопротивление диода) положителен. Соответственно положительны все коэффициенты полинома и точки равновесия устойчивы. Если точка равновесия распола-

гается на падающем участке характеристики, то угловой коэффициент

$$k = (-1/|r_d|) < 0.$$

Для выполнения условий устойчивости в этом случае должны соблюдаться неравенства:

$$|r_d| \geq \frac{L_2}{C_4} \cdot \frac{1}{R_1}; \quad (5.51)$$

$$|r_d| \geq R_1. \quad (5.52)$$

Неравенство (5.52), зависящее только от резистивных элементов, называют условием устойчивости по постоянному току. Состояние равновесия  $\lambda_2$  на падающем участке характеристики устойчиво, если наклон прямой, изображающей характеристику цепи смещения из элементов  $E$  и  $R_1$ , по абсолютной величине больше наклона характеристики диода (рис. 5.16), и неустойчиво, если наклон прямой (пунктирная линия) меньше, что соответствует большим значениям  $R_1$ .

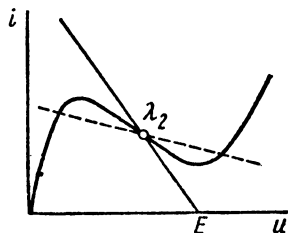


Рис 5.16

Неравенство (5.51), зависящее от параметров как резистивных, так и реактивных элементов, называют *условием устойчивости по переменному току*. При его выполнении колебания в цепи не возникают.

Для усилителя на туннельном диоде должны выполняться оба условия устойчивости. Для генератора высокочастотных колебаний должно выполняться условие (5.51), обеспечивающее устойчивость рабочей точки, а условие (5.52) не должно выполняться. При этом возникнут колебания в окрестности точки равновесия.

## ГЛАВА 6

### МЕТОД ТРАЕКТОРИЙ

### В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЯ

#### § 6.1. Общие замечания

Как указывалось, общих аналитических методов решения нелинейных уравнений не существует. Поэтому большое значение имеет качественный анализ нелинейных систем.

*Качественный анализ*, который можно провести более простыми средствами, позволяет без получения количественного

решения выявить такие важные моменты, как характер режима системы, возможность возникновения устойчивых колебаний, оценка максимальных значений напряжений и токов на отдельных элементах, асимптотическое поведение системы (при  $t \rightarrow \infty$ ) и т. п. С помощью качественного анализа часто удается оценить степень влияния того или иного элемента и его характеристики, а также начальных условий на режим цепи.

Важнейшим методом качественного анализа автономных цепей первого и второго порядков является метод построения траекторий в одно- и двухмерном пространстве состояний (в одно- и двухмерной системах координат). Особенно просто устанавливаются на основе качественных представлений свойства решения уравнения состояния автономной цепи первого порядка, которое может быть изображено траекторией в одномерной системе координат. Здесь характер решения можно определить по виду правой части уравнения  $x' = f(x)$  на основе учета: 1) устойчивости и неустойчивости точек равновесия; 2) непрерывности заряда емкости и потокосцепления индуктивности; 3) возрастания или убывания переменной в зависимости от знака производной.

Для качественного исследования нелинейного уравнения состояния первого порядка достаточно построить график его правой части  $f(x)$  в зависимости от переменной состояния  $x$ . Пересечение графиком оси  $x$  дает очень важные *точки или состояния равновесия* автономной цепи. Каждому значению переменной  $x$  можно сопоставить точку на графике  $f(x)$ , называемую и з о б р а ж а ю щ е й. Изменению значения  $x$  соответствует перемещение изображающей точки по кривой  $f(x)$ . Направление перемещения изображающей точки и соответствующего ему изменения переменной от некоторого начального положения  $x(0)$  определяется знаком ординат графика: при  $f(x) = (dx/dt) > 0$ , т. е. в верхней полуплоскости и положительном знаке производной, получим возрастание  $x$  и перемещение изображающей точки в п р а в о, а при  $f(x) = (dx/dt) < 0$  — в н и ж н е й полуплоскости и отрицательной производной — убывание  $x$  и п е р е м е щ е н и е в л е в о. На основе приведенного простого соображения легко установить устойчивость или неустойчивость точек равновесия: если изображающая точка направлена к точке равновесия слева и справа, то она устойчива, в противном случае точка равновесия неустойчива.

Достаточно, установив направления перемещения изображающих точек на всех участках графика, спроектировать соответствующий путь на ось  $x$ , чтобы получить траекторию уравнения первого порядка в одномерной системе координат.

Автономная цепь второго порядка описывается системой двух уравнений с двумя неизвестными, и решения будут изображаться траекториями в двухмерном пространстве состояний. Функции правых частей уравнений, определяющие характер обеих переменных, будут представляться поверхностями. Наглядность их графического изображения исчезает. Поэтому выявить качественные характеристики процессов и соответствующих траекторий на основе простых соображений оказывается невозможным. Как и для одномерного пространства, большое значение здесь имеет определение точек равновесия и исследование поведения траекторий в их окрестности.

Существуют приближенные методы, позволяющие построить траектории в пространстве состояний и таким путем провести качественный анализ процессов в любых автономных цепях второго порядка. Наглядное геометрическое представление решений с помощью траекторий оказывается полезным для получения общей качественной картины ожидаемых процессов в автономных цепях.

## § 6.2. Траектории в одномерном пространстве

Правая часть уравнения автономной цепи первого порядка с одной неизвестной переменной состояния

$$dx/dt = f(x) \quad (6.1)$$

зависит только от искомой переменной — время в явном виде в уравнения не входит.

В соответствии с изложенным в предыдущей главе, если запаасающим энергию элементом является емкость, то переменная  $x$  имеет смысл напряжения (заряда) на емкости, а функция  $f(x) = -i_{вх}$  — входного тока (с обратным знаком) резистивной части цепи в зависимости от напряжения (заряда), так что  $f(x)$  представляет входную характеристику резистивной подцепи с обратным знаком.

Если же запаасающим энергию элементом является индуктивность, то переменная  $x$  имеет смысл тока (потокосцепления) в индуктивности, а функция  $f(x) = -u_{вх}$  — входного напряжения (с обратным знаком) резистивной части цепи в зависимости от тока (потокосцепления).

Будем полагать  $f(x)$  однозначной функцией, означающей, что входная характеристика резистивной подцепи управляется напряжением в случае емкости и током в случае индуктивности.

Траектория решения уравнения относительно единственной переменной состояния  $x = x(t)$  будет изображаться в виде

отрезка прямой на оси  $x$  с начальной точкой  $x(0)$  и конечной точкой  $x(\infty)$ .

В качестве примера построим траекторию простейшей линейной цепи из последовательного  $RC$ -контура, подключенного при  $t = t_0 = 0$  к источнику постоянного напряжения  $U = 1$  В (рис. 6.1, а). Пусть начальное напряжение на емко-

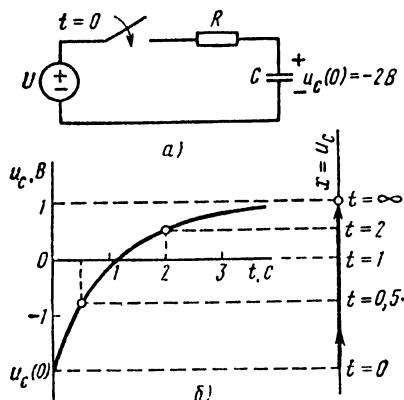


Рис. 6.1

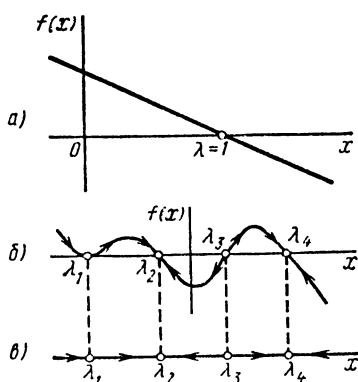


Рис. 6.2

сти  $u_C(0) = -2$ В. При  $R = 1$  Ом и  $C = 1$  Ф уравнение состояния с переменной — напряжением на емкости — запишется в виде

$$du_C/dt = -u_C + 1. \quad (6.2)$$

Установившееся напряжение на емкости равно напряжению источника  $u_{Cy} = U = 1$  В. Напряжение на емкости будет изменяться по экспоненте с постоянной времени  $\tau = RC = 1$  с от заданного начального значения  $u_C(0) = -2$  В до установившегося:

$$u_C = u_C(\infty) + [u_C(0) - u_C(\infty)]e^{-t/RC} = 1 - 3e^{-t}. \quad (6.3)$$

График изменения напряжения представлен на рис. 6.1, б слева. Справа изображена фазовая траектория (жирной линией) на оси  $x = u_C$ . Стрелками указано направление движения изображающей точки при изменении времени от  $t = 0$  до  $t = \infty$ . Траектория получена проекцией точек графика известного решения для выбранных значений времени  $t$  на ось  $x$ . Эти значения проставляют у соответствующих точек траектории. При этом получается *однозначное* соответствие между *решением и траекторией* — последняя содержит ту же информацию, что и решение.

Указанный прием означает графическое исключение времени, которое необходимо при построениях траекторий.

При анализе нелинейных цепей представляет интерес построение траектории непосредственно по уравнению на основе качественных соображений без получения самого решения. Для цепи первого порядка при заданном начальном условии оказывается возможным построить отдельные участки траектории на оси и указать их направления по расположению точек равновесия и поведению траектории в их окрестности. Точки равновесия, удовлетворяющие условию равенства нулю правой части уравнения  $f(x) = 0$ , являются точками пересечения графика  $f(x)$  в осью  $x$ .

Приведенное качественное исследование процессов в простых автономных цепях первого порядка позволяет сделать выводы о некоторых общих свойствах, характерных для нелинейных автономных цепей: 1) возможность получения нескольких различных установившихся состояний, соответствующих устойчивым точкам равновесия; 2) решающее влияние на характер процессов или режима и установление того или иного конечного состояния начальных условий — начального тока в индуктивности и начального напряжения на емкости.

Для рассмотренного примера  $RC$  линейной цепи график правой части  $f(x) = -x + 1$  ( $x = u_C$ ) представляет прямую (линейную зависимость между напряжением и током), пересекающую ось  $x$  в точке  $x = 1$ , которая является единственной точкой равновесия (рис. 6.2, а). Изображающая точка направлена к ней как слева ( $f(x) > 0$ ), так и справа ( $f(x) < 0$ ) — точка равновесия устойчива. Проекция изображающих точек на ось  $x$  даст траекторию, полученную по решению (рис. 6.1, б).

В случае *нелинейных* цепей правая часть имеет более сложный нелинейный вид — график ее может многократно менять знак. Так, для графика  $f(x)$ , приведенного на рис. 6.2, б, получим четыре точки равновесия:  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ .

Исследуем поведение траектории в окрестности точек равновесия. Рассмотрим одну из точек равновесия с координатой  $x = \lambda_i$ , которая обращает в нуль правую часть уравнения  $f(\lambda_i) = 0$ . Разложим в окрестности этой точки нелинейную правую часть в ряд Тейлора и, ограничившись линейным членом, получим

$$f(x) = f(\lambda_i) + f'(\lambda_i)(x - \lambda_i) = f'(\lambda_i)(x - \lambda_i) = \alpha y, \quad (6.4)$$

где  $\alpha = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=\lambda_i}$  — значение производной функции в точке  $x = \lambda_i$ ;  $y = x - \lambda_i$  — новая переменная, соответствующая переносу начала координат в точку равновесия  $x = \lambda_i$ .

Линеаризованное уравнение состояния цепи, справедливое вблизи точки равновесия, имеет вид

$$dy/dt = \alpha y. \quad (6.5)$$

Единственный корень характеристического уравнения получается равным значению производной в точке равновесия:

$$\rho_1 = \alpha = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=\lambda_i}.$$

Рассмотрим частные случаи.

1. *Корень и, следовательно, наклон графика функции  $f(x)$  в точке равновесия отрицательны ( $\alpha < 0$ ).* Корень лежит на вещественной отрицательной полуоси плоскости комплексной частоты: *точка равновесия устойчива* и траектории направлены к точке равновесия как слева, так и справа (точки  $\lambda_2, \lambda_4$  на рис. 6.2). К этому же выводу можно прийти на основании следующих рассуждений. Слева устойчивой точки равновесия функция  $f(x) > 0$  и согласно уравнению  $dx/dt = f(x)$  производная по времени также положительна. Следовательно, переменная  $x$  будет нарастать, а изображающая ее точка — перемещаться слева направо в сторону точки равновесия. Справа устойчивой точки равновесия  $f(x) < 0$  производная  $dx/dt$  отрицательна и переменная  $x$  будет уменьшаться, а изображающая ее точка — перемещаться справа налево, снова в сторону точки равновесия.

Приведенное простое определение направления движения изображающей точки применимо, очевидно, на всей оси  $x$ , на любом удалении от точки равновесия, в отличие от линеаризованного подхода. Следовательно, *отрицательность наклона графика функции  $f(x)$  в точке равновесия является условием ее устойчивости.*

2. *Корень и наклон графика функции  $f(x)$  в точке равновесия положительны ( $\alpha > 0$ ).* Корень лежит на вещественной положительной полуоси, следовательно, точка равновесия неустойчива и траектория направлена от точки равновесия как слева, так и справа (точка  $\lambda_3$  на рис. 6.2). Действительно, слева неустойчивой точки равновесия  $f(x) < 0$  производная по времени отрицательна, так что переменная  $x$  уменьшается и изображающая точка будет перемещаться влево от точки равновесия. Справа неустойчивой точки равновесия производная  $dx/dt$  положительна и перемещение изображающей точки будет происходить вправо от точки равновесия.

Следовательно, *положительность наклона графика функции  $f(x)$  в точке равновесия является условием ее неустойчивости*

3. Корень и наклон графика функции  $f(x)$  в точке равновесия имеют нулевые значения ( $\alpha = 0$ ) Корень лежит в начале координат плоскости комплексной частоты. Такой случай возможен, если график  $f(x)$  касается оси  $x$ .

Если касание происходит сверху (точка  $\lambda_1$  на рис. 6.2), то  $f(x) > 0$  и производная  $dx/dt$  положительна как слева, так и справа от точки равновесия, следовательно, изображающая точка будет, перемещаясь слева направо, проходить точку равновесия. Траектория направлена к точке равновесия слева от нее и от точки равновесия справа от нее.

При касании графика  $f(x)$  оси  $x$  снизу получится обратная картина: изображающая точка, перемещаясь справа налево, будет проходить точку равновесия. Нулевой корень должен быть отнесен к случаю *неустойчивого корня*.

На основании изложенного приходим к выводу, что с помощью графика однозначной функции  $f(x)$  можно: 1) определить точку равновесия цепи; 2) установить устойчивость и неустойчивость точек равновесия; 3) указать направления траекторий на любом участке оси  $x$ , т. е. для любого начального состояния  $x(0)$ , которое откладывается на оси на расстоянии  $x(0)$  от начала координат. При отсутствии случая  $\alpha = 0$ , который редко встречается на практике, устойчивые и неустойчивые точки равновесия будут чередоваться.

Как видно из рис. 6.2, в, в неустойчивых точках равновесия ( $\alpha > 0$ ) происходит изменение направления траектории. Если начальное состояние  $x(0)$  расположено слева от неустойчивой точки, то переменная  $x$  монотонно убывает до ближайшей устойчивой точки или до  $-\infty$  при отсутствии устойчивой точки. Если начальное состояние расположено справа от неустойчивой точки, то переменная  $x$  монотонно нарастает, пока не достигнет ближайшей устойчивой точки; при отсутствии такой точки нарастание будет происходить до бесконечности.

Из рис. 6.2 видно, что траектории, построенные для произвольных начальных состояний, составляются из отдельных направленных отрезков, расположенных между двумя соседними точками равновесия или между неустойчивой точкой и точками  $\pm\infty$ . На основании сказанного можно сделать следующий вывод.

В устойчивой цепи, описываемой уравнением первого порядка с однозначной правой частью  $f(x)$ , в зависимости от величины и знака начального состояния процесс имеет монотонный убывающий или нарастающий характер. Начинается процесс в точке, изображающей начальное состояние, и заканчивается в установившемся состоянии — в одной из устойчивых точек равновесия. Какая из устойчивых точек равновесия



является установившимся состоянием процесса, зависит от начального состояния. При  $x(0) < \lambda_3$  (см. рис. 6.2, в) установившимся состоянием будет точка равновесия  $\lambda_2$ , а при  $x(0) > \lambda_3$  — точка  $\lambda_4$ .

На основании приведенных сведений о свойствах траекторий, представляющих качественную картину поведения автономных нелинейных цепей первого порядка, можно сделать следующие общие выводы, справедливые и для цепей более высокого порядка:

1) в нелинейной автономной цепи может быть несколько состояний равновесия, т. е. несколько установившихся режимов, устойчивых или неустойчивых. Неустойчивые режимы не могут существовать и наблюдаться в физических системах;

2) характер процесса и установление того или иного стационарного режима существенно зависят от начальных условий в цепи

Для того чтобы по найденной траектории, изображенной в виде отрезков прямой на оси  $x$ , можно было построить зависимость решения от времени, следует нанести шкалу времени, т. е. определить и записать время для ряда выбранных точек. Для одномерных траекторий, построенных по уравнению, решение которого неизвестно, время  $\Delta t = t_j - t_i$  прохождения участка траектории между любыми двумя точками  $x(t_i)$  и  $x(t_j)$  можно найти путем интегрирования (6.1):

$$t_j - t_i = \int_{t_i}^{t_j} dt = \int_{x_i}^{x_j} \frac{1}{f(x)} dx. \quad (6.6)$$

Время прохождения численно равно площади, ограниченной кривой, обратной правой части уравнения  $f(x)$ . Для определения времени  $t_j$  следует построить график функции  $1/f(x)$ , а затем, применяя какой-либо метод приближенного интегрирования (метод трапеций или подсчета числа клеток), найти площади, начиная от начального состояния  $x(t_0)$  до любого выбранного состояния  $x(t_j)$ .

Из (6.6) видно, что участки траектории с наибольшими значениями  $f(x)$  будут проходить за малое время — быстро, а участки с наименьшими значениями  $f(x)$  за большее время — медленно.

Величина  $1/f(x)$  обращается в бесконечность в точке равновесия и быстро нарастает с приближением к ней. Это означает, что прохождение небольшого участка траектории вблизи точки равновесия требует значительного времени и что точка устойчивого равновесия будет достигнута при  $t = \infty$ .

Рассмотрим пример построения траектории для цепи первого порядка, показанной на рис. 6.3, *а*. Цепь состоит из туннельного диода, параллельно которому присоединена емкость, и цепи смещения из источника постоянного напряжения и последовательного сопротивления. На рис. 6.3, *б* показана входная характеристика  $\mathcal{Z}$  резистивной подцепи (пунктирный прямоугольник на рис. 6.3, *а*) со стороны емкостного элемента. Характеристика получена суммированием ординат графика *1* — характеристики туннельного диода и *2* — характеристики цепи смещения, определяемой выражением  $i = (U - u)/R$ . Значения параметров цепи смещения выбраны таким образом, чтобы получить три точки равновесия.

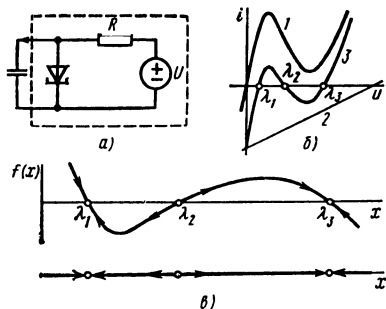


Рис. 6.3

На рис. 6.3, *в* показан график  $f(x) = -i_{вх}(x)$  и под ним — траектория на оси  $x = u$ . Из трех точек равновесия две крайние точки являются устойчивыми — к ним направлены траектории с двух сторон. Средняя точка является неустойчивой — траектории направлены от нее влево и вправо. При начальном напряжении на емкости  $\lambda_1 < x(0) < \lambda_2$  установившимся состоянием будет точка равновесия  $\lambda_1$ , а при  $\lambda_3 > x(0) > \lambda_2$  — точка равновесия  $\lambda_3$ .

Из сравнения графиков  $f(x)$  правых частей уравнений (рис. 6.2, *б*) и одномерных траекторий (рис. 6.2, *в*), а также графиков рис. 6.3, *в* можно сделать вывод, что они дают одинаковую информацию. Одномерная траектория представляет лишь проекцию графика  $f(x)$ , т. е. характеристики резистивной подцепи с нанесенными направлениями перемещения изображающей точки. В связи со сказанным в цепях первого порядка вместо одномерных траекторий обычно ограничиваются изображением перемещений изображающих точек по ветвям графика зависимости правой части уравнения от переменной состояния.

### § 6.3. Процессы и траектории автономных цепей первого порядка с многозначными характеристиками

В предыдущем параграфе рассматривались процессы и траектории в цепях первого порядка, когда входная характе-

ристика резистивной подцепи управлялась переменной состоя-  
ния — напряжением (в случае емкостного элемента) и током  
(в случае индуктивного элемента). Соответственно входная  
вольт-амперная характеристика резистивной подцепи со  
стороны выводов реактивного элемента была однозначной  
функцией.

Здесь также рассмотрим автономную цепь первого порядка,  
содержащую один элемент, запасующий энергию, — индук-  
тивность или емкость, но будем полагать, что входная характе-  
ристика резистивной подцепи является *немонотонной и много-*

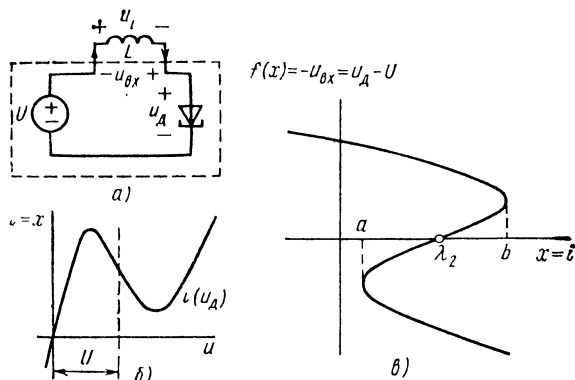


Рис 6.4

значной, которая управляется входным током в случае емкост-  
ного элемента и входным напряжением в случае индуктивного  
элемента.

В качестве примера возьмем цепь (рис. 6.4, а), состоящую  
из последовательно соединенных туннельного диода, источни-  
ка постоянного напряжения смещения и индуктивности. Вход-  
ное напряжение резистивной подцепи равно сумме напряжений  
диода и источника  $u_{\text{вх}} = u_{\text{д}}(i) - U$ , показанных на рис. 6.4, б.  
Влияние смещения состоит в перемещении характеристики диода  
или начала координат параллельно оси ординат, так что  
пунктирная линия является осью ординат для результирующей  
характеристики. Переменной состояния здесь является ток  
 $x = i$  и уравнение состояния записывают в виде

$$dx/dt = -u_{\text{вх}}(x) = -[u_{\text{д}}(x) - U] = f(x).$$

График правой части уравнения, полученный соответствующим  
обращением показанной на рис. 6.4, б характеристики  
 $i(u)$ , приведен на рис. 6.4, в. Обращенная характеристика  
 $f(x) = f(i)$  построена в зависимости от тока с учетом знака

«минус» перед  $u_{вх}$ . Точка пересечения графика с осью  $x$  является точкой равновесия  $\lambda_2$ . Изменяя напряжение смещения, можно перемещать график правой части уравнения в вертикальном направлении.

Цепь первого порядка с многозначной входной характеристикой, график которой приведен на рис. 6.4, в, обладает весьма примечательным свойством, заключающимся в том, что в цепи могут происходить скачкообразные изменения напряжений и токов. Кроме того, в цепи с потерями могут установиться незатухающие периодические колебания при отсутствии внешнего периодического воздействия. Указанное свойство имеет исключительно большое практическое значение для создания различных устройств генерирования колебаний.

Задача состоит в том, чтобы на основе понятия об устойчивости точек равновесия и общих качественных соображений показать возможность появления скачкообразных изменений напряжения и токов и установления незатухающих колебаний, называемых *автоколебаниями*. Выяснение качественной картины процессов в цепи позволит строить траектории на оси состояния без дополнительных количественных исследований.

В общем случае число монотонных ветвей многозначной характеристики может быть любым. Для простоты примем, что характеристика имеет три ветви — такой случай чаще всего встречается на практике. Обозначим показанные на рис. 6.4, в три монотонные ветви входной характеристики (с обратным знаком) резистивной подцепи следующим образом:

$f(x) = f_1(x)$ ; ( $a < x < \infty$ ) — нижняя ветвь;

$f(x) = f_2(x)$ ; ( $a < x < b$ ) — средняя ветвь;

$f(x) = f_3(x)$ ; ( $-\infty < x < b$ ) — верхняя ветвь.

Прежде всего установим точки равновесия и их устойчивость. В цепи возможна только одна точка равновесия, которая является точкой пересечения кривой  $f(x)$  с осью  $x$ . В зависимости от величины смещения точка равновесия может принадлежать любой из трех ветвей.

Согласно рассмотренному в § 6.2 критерию точки равновесия, принадлежащие нижней и верхней ветвям, наклоны которых в указанных точках отрицательны, будут устойчивыми. Точка же равновесия, принадлежащая средней ветви с положительным наклоном, будет неустойчивой. Характер процесса и траектории на оси состояний существенно зависят от того, на какой из ветвей располагается точка равновесия.

Раньше чем перейти к качественному анализу процессов в цепях первого порядка с многозначными входными характери-

стиками резистивной подцепи, напомним некоторые положения, существенные для понимания последующего материала.

Для цепи с индуктивным элементом переменная  $x$  является током в индуктивности, а величина  $f(x)$  пропорциональна напряжению на индуктивности, т. е. скорости изменения (производной) тока во времени. При конечной амплитуде напряжения *потокосцепление (ток) в индуктивности представляет непрерывную величину и не может изменяться скачком*. Это, как известно, следует из представления потокосцепления в момент времени  $t = t +$  через начальное потокосцепление при  $t = t -$  с учетом конечности  $u$ :

$$\Psi(t+) = \Psi(t-) + \int_{t-}^{t+} u dt = \Psi(t-). \quad (6.7)$$

Для цепи с емкостным элементом переменная  $x$  является напряжением на емкости, а величина  $f(x)$  пропорциональна току в емкости, т. е. скорости изменения (производной) напряжения во времени. При конечной амплитуде тока *заряд (напряжение) на емкости является непрерывной величиной и не может претерпевать скачков*. Данное положение следует из представления заряда в момент времени  $t = t +$  через начальный заряд при  $t = t -$  с учетом конечности  $i$ :

$$q(t+) = q(t-) + \int_{t-}^{t+} i dt = q(t-). \quad (6.8)$$

Следует помнить, что рассматривается идеализированная модель цепи, составленная из чисто резистивных элементов и присоединенная к одному также идеализированному элементу, запасующему энергию. В действительности, любой резистивный элемент имеет малые паразитные параметры, которые могут влиять на поведение цепи в режиме быстрых скачкообразных изменений напряжений и токов. Но учет таких элементов повышает порядок цепи и усложняет анализ. Необходимо учитывать только минимальное число действительно существенных паразитных параметров, но выбор их оказывается сложным. Если оставаться в рамках цепи первого порядка и не учитывать паразитные параметры, то при анализе процессов неизбежно возникают некоторые неопределенности.

Благодаря многозначности правой части  $f(x)$  уравнение состояния  $x' = f(x)$  в любой момент времени может иметь три различных решения, соответствующие трем ветвям характеристики. В действительности, в любой момент времени уравнение

цепи должно иметь решение  $x(t)$ , соответствующее только одной ветви характеристики: рабочая точка, представляющая решение в данный момент времени, может и должна находиться на вполне определенной одной ветви.

Положение рабочей точки в начальный момент времени  $t = t_0$  и соответствующая ей ветвь характеристики определяются начальным значением правой части  $f(x_0)$ , т. е. начальным напряжением  $u_C(t_0)$  на емкости или начальным током  $i_L(t_0)$  в индуктивности.

Последующее перемещение рабочей точки, определяющее решение уравнения состояния, как показывает опыт, происходит только по той ветви характеристики, на которой оказалась рабочая точка. Переход на другие ветви, пока рабочая точка не дошла до конца первоначальной ветви, невозможен. Доказательство этого очень важного положения требует привлечения существенных паразитных параметров, т. е. рассмотрения сложной цепи высокого порядка, что связано с большими трудностями. Поэтому обычно принимают без доказательства положение о том, что *рабочая точка, попавшая на одну из ветвей многозначной характеристики, остается на ней до тех пор, пока не достигнет границы ветви.*

На основании приведенного положения полагаем, что правая часть уравнения состояния будет в каждый данный момент вполне определенной функцией, выражающей одну из ветвей характеристики:  $dx/dt = f_i(t)$ .

Изменению переменной  $x(t)$  соответствует перемещение представляющей ее рабочей точки по характеристике. Качественное исследование процессов в рассматриваемой цепи сводится к установлению направлений перемещения рабочей точки и определению места перехода рабочей точки с одной ветви на другую. Кроме учета начального значения переменной, определяющего начальное положение рабочей точки, решение этой задачи проводят на основе следующего, упомянутого в § 6.1, простого соображения.

В нижней полуплоскости  $f(x) < 0$  и производная  $x'(t) < 0$ . Отрицательность производной означает убывание переменной. Следовательно, в нижней полуплоскости возможно *перемещение рабочей точки* только в сторону уменьшения переменной  $x$ , т. е. влево. В верхней полуплоскости  $f(x) > 0$  и производная  $x'(t) > 0$ . Положительность производной означает возрастание переменной. Следовательно, в верхней полуплоскости рабочая точка может перемещаться только в сторону увеличения переменной  $x$ , т. е. *вправо*.

Если задана входная характеристика резистивной подцепи в виде графика функции  $f(x)$ , то с учетом изложенного нетрудно

наметить на графике путь рабочей точки, из которого можно получить основные качественные данные о процессе в цепи.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим качественно процессы в цепи первого порядка с многозначной характеристикой, которая приведена на рис. 6.4. Примем зависящее от смещения расположение характеристики, показанное на рис. 6.5, а с неустойчивой точкой равновесия  $\lambda_2$ . Положим далее начальное значение переменной  $x(t_0)$  таким, что при  $t = t_0$  рабочая точка занимает положение  $m_0$  на нижней ветви характеристики,

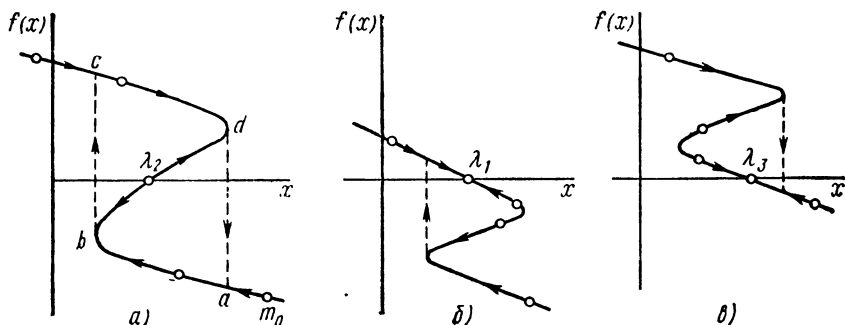


Рис. 6.5

для которой  $f(x) = f_1(x) < 0$ . При  $t > t_0$  рабочая точка в силу отрицательности производной будет перемещаться по нижней ветви характеристики влево, в направлении стрелки.

В крайней левой точке  $b$  ветви производная остается отрицательной, и значение переменной  $x$  должно продолжать уменьшаться, поэтому переход на среднюю ветвь, где перемещение рабочей точки возможно только влево, исключается. Здесь имеется единственный путь — рабочая точка должна мгновенно перейти на верхнюю ветвь. В силу непрерывности переменной  $x$  переход должен произойти скачком по вертикальной линии в точку  $c$ . Следовательно, величина  $f(x)$ , т. е. ток в емкости или напряжение на индуктивности, при указанном переходе претерпевает скачкообразное изменение.

Для верхней ветви производная положительна и рабочая точка из точки  $c$  должна перемещаться вправо, в сторону возрастания переменной состояния. В крайнем правом положении (точка  $d$ ) рабочая точка должна мгновенно перейти на нижнюю ветвь в точку  $a$ , так как переход на среднюю ветвь, где возможно перемещение только вправо, снова исключается. Из точки  $a$  рабочая точка начнет перемещение по нижней ветви

влево и далее движение будет происходить по неизменному замкнутому пути, обозначенному стрелками.

Если начальное условие таково, что соответствующая ему начальная точка расположена на верхней ветви, то рабочая точка будет перемещаться по этой ветви вправо, в сторону увеличения переменной  $x$ , поскольку производная здесь положительна. В конце ветви рабочая точка перейдет на нижнюю ветвь и далее процесс будет продолжаться описанным ранее образом.

Если начальная точка окажется на второй ветви ниже точки равновесия, где производная отрицательна, то рабочая точка начнет перемещаться влево до точки  $b$ , откуда возможен только скачкообразный переход в точку  $c$  на верхней ветви и повторение описанного процесса.

Если начальная точка попадет на вторую ветвь выше точки равновесия, где производная положительна, то рабочая точка будет перемещаться вправо до точки  $d$ , откуда она должна скачком перейти в точку  $a$  на нижней ветви.

Таким образом, на какой бы ветви ни оказалась начальная точка, перемещение рабочей точки происходит по замкнутому пути  $a - b - c - d - a$ . Время прохождения рабочей точкой участков  $a - b$ , а также  $c - d$  от цикла к циклу не будет изменяться в силу неизменности характеристики. Время скачкообразных переходов зависит от неучитываемых паразитных параметров и практически очень невелико. В результате переменной  $x$ , так же как и  $f(x)$ , будут периодическими функциями времени, причем величина  $f(x)$ , представляющая ток в емкости или напряжение на индуктивности, испытывает скачки дважды за период.

Указанное явление возникновения автоколебаний или генерации колебаний нелинейной цепью, состоящей из одного элемента, запаасающего энергию, и резистивных элементов, широко используется в устройствах, называемых м у л ь т и в и б р а т о р а м и. Для возникновения колебаний необходимо выполнение следующих условий: 1) входная характеристика резистивной подцепи должна иметь падающий участок с отрицательным динамическим сопротивлением; 2) точка равновесия должна быть неустойчивой, что достигается выбором соответствующего смещения характеристики.

Если смещение выбрано таким, что точка равновесия является устойчивой, т. е. располагается на нижней или верхней ветви характеристики, то установившихся колебаний не будет — процесс так или иначе закончится в устойчивой точке равновесия. На рис. 6.5, б, в показаны направления перемещения рабочей точки по характеристике при расположении



устойчивой точки равновесия на верхней (рис. 6.5, б) и нижней (рис. 6.5, в) ветвях. Рабочая точка, попавшая в любую часть ветви, которой принадлежит устойчивая точка равновесия, будет всегда плавно перемещаться в направлении к ней. Если рабочая точка попадает на другие ветви, то, перемещаясь в направлении стрелок, после одного скачкообразного перехода на ветвь с точкой равновесия  $\lambda_i$  она придет в устойчивую точку равновесия.

#### § 6.4. Понятие о траекториях на плоскости состояния

При переходе к автономным цепям второго порядка процессы и соответственно отображающие их траектории существенно усложняются. Автономная цепь второго порядка описывается системой из двух уравнений с двумя искомыми переменными состояния  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ :

$$\left. \begin{aligned} dx_1/dt &= f_1(x_1, x_2); \\ dx_2/dt &= f_2(x_1, x_2). \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

В правые части время не входит в явном виде. Двухмерные уравнения состояния (6.9) можно изобразить графически на плоскости состояния с координатными осями  $x_1$  —  $x_2$  в виде зависимости  $x_2 = \varphi(x_1)$ , представляющей траекторию процесса.

Траектория на плоскости состояний принимает простой физический смысл при выборе в качестве переменных функции и ее производной, т. е. нормальных переменных состояния, когда уравнения состояния цепи второго порядка имеют вид

$$\left. \begin{aligned} dx_1/dt &= x_2; \\ dx_2/dt &= f_2(x_1, x_2). \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Если в качестве переменной  $x_1$ , т. е. оси абсцисс, принята некоторая величина, то переменной  $x_2$  (осью ординат) является скорость изменения во времени этой величины. При указанном выборе координатных осей плоскость состояний обычно называют фазовой плоскостью, а траекторию на ней — фазовой траекторией. Каждой паре значений  $x_1$  и  $x_2$  будет соответствовать изображающая точка или вектор на плоскости  $x_1$  —  $x_2$ . При изменении переменных во времени изображающая точка перемещается на плоскости, описывая фазовую траекторию, которая начинается в начальной точке  $x_1(0)$ ,  $x_2(0)$ . Задаваясь начальными условиями в пределах всей плоскости состояний, можно построить *семейство фа-*

зовых траекторий («фазовый портрет»), которое дает наглядную картину поведения цепи. При этом построение траекторий на плоскости состояний намного усложняется по сравнению с построением траекторий на оси состояний, так же как соответствующие процессы в цепях второго порядка получаются сложнее, чем в цепях первого порядка.

Первоначальное ознакомление с траекториями на плоскости состояний проведем на простом примере свободного режима в линейном  $RLC$ -контуре. Если для последовательного  $RLC$ -контра (рис. 6.6, а) принять в качестве переменных напряжение  $u_C$  на емкости и ток  $i$  в индуктивности, то уравнения состояния запишем в виде:

$$\left. \begin{aligned} du_C/dt &= i/C; \\ di/dt &= -u_C/L - Ri/L. \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

Как видно,  $u_C$  и  $i$  являются нормальными переменными состояния. Исключив напряжение, получим уравнение второго порядка для тока свободного режима:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0, \quad (6.12)$$

где  $\alpha = R/2L$  — коэффициент затухания;  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  — угловая частота контура без потерь.

Будем полагать для общности, что  $R$  и, следовательно,  $\alpha$  принимают как положительные, так и отрицательные значения. Последнее может иметь место в активных резистивных цепях с отрицательными сопротивлениями.

Здесь и в последующем понадобятся решения для переменных линейной цепи второго порядка. Найдем решения для тока в контуре и напряжения на емкости, удовлетворяющие начальным условиям: при  $t = 0$  ток в индуктивности  $i(0) = I_0$  и напряжение на емкости  $u_C(0) = U_0$ . Чтобы записать решение для тока, достаточно знать переходную характеристику последовательного  $RLC$ -контра, которая известна из теории линейных цепей. Взяв первую производную от переходной характеристики, найдем выражение импульсной характеристики.

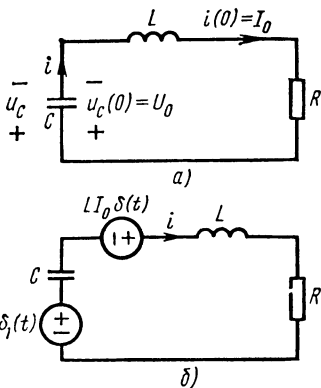


Рис. 6.6

Ненулевые начальные условия можно учесть с помощью источников импульсного или ступенчатого напряжения и тока. Реакция на действие таких источников пропорциональна импульсной или переходной характеристике.

Вид переходной характеристики контура определяется корнями характеристического уравнения, которые для уравнения (6.12) равны

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}.$$

а. При  $|\alpha| > \omega_0$  или  $|\bar{R}| > 2\sqrt{L/C}$  получаются два вещественных корня:

$$p_1 = -(\alpha - \beta) = -\lambda_1; \quad p_2 = -(\alpha + \beta) = -\lambda_2,$$

где

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < |\alpha|.$$

Режим в цепи будет аperiодическим. Переходная характеристика для тока в контуре имеет вид

$$h_1 = \frac{1}{2\beta L} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}). \quad (6.13)$$

Импульсная характеристика равна производной от переходной характеристики

$$h = \frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{2\beta L} (\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}). \quad (6.14)$$

При  $t \geq 0$ , как известно из теории линейных цепей, начальный ток в индуктивности можно учесть источником импульсного напряжения со значением  $LI_0\delta(t)$ , а начальное напряжение на емкости — источником ступенчатого напряжения, значение которого равно  $-U_0\delta_1(t)$  (рис. 6.6, б), где  $\delta(t)$  и  $\delta_1(t)$  — соответственно единичная импульсная и единичная ступенчатая функции. Результирующий ток в контуре равен по принципу наложения сумме токов от действия каждого источника. Ток от действия источника ступенчатого напряжения получим, умножив (6.13) на  $-U_0$ , а ток от действия источника импульсного напряжения — умножив (6.14) на  $LI_0$ . Знак «—» у  $U_0$  вызван тем, что полярности напряжений  $\delta_1(t)$  и емкости противоположны. Искомое решение для тока выразится соотношением

$$i = LI_0 h(t) - U_0 h_1(t) = \frac{1}{2\beta} [(\lambda_2 I_0 + U_0/L) e^{-\lambda_2 t} - (\lambda_1 I_0 + U_0/L) e^{-\lambda_1 t}]. \quad (6.15)$$

После интегрирования и ряда преобразований найдем напряжение на емкости

$$u_c = \frac{1}{2\beta C} [(I_0 + U_0/\lambda_1 L) e^{-\lambda_1 t} - (I_0 + U_0/\lambda_2 L) e^{-\lambda_2 t}]. \quad (6.16)$$

б. При  $|\alpha| < \omega_0$  или  $|\tilde{R}| < 2\sqrt{L/C}$  получаются два комплексно-сопряженных корня:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_d. \quad (6.17)$$

В цепи будет колебательный режим. Переходная характеристика для тока в контуре

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{L/C}} \frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \quad (t \geq 0). \quad (6.18)$$

Производная этой функции равна импульсной характеристике

$$h = \frac{dh_1}{dt} = \frac{\omega_0}{\sqrt{L/C}} e^{-\alpha t} \left( \cos \omega_d t - \frac{\alpha}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \quad (t \geq 0). \quad (6.19)$$

Начальные условия учитывают теми же источниками импульсного  $L I_0 \delta(t)$  и ступенчатого  $-U_0 \delta_1(t)$  напряжений, что и для апериодического режима. Поэтому ток в контуре при нулевых начальных условиях равен

$$i = L I_0 h(t) - U_0 h_1(t) = e^{-\alpha t} [I_0 \cos \omega_d t - (U_0/\omega_d L - \alpha I_0/\omega_d) \sin \omega_d t]. \quad (6.20)$$

Напряжение на емкости найдем интегрированием тока

$$u_c = U_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = -U_0 e^{-\alpha t} [\cos \omega_d t + (\alpha/\omega_d + I_0/\omega_d C U_0) \sin \omega_d t]. \quad (6.21)$$

Перейдем теперь к построению траекторий свободных колебаний в линейном  $RLC$ -контуре. Начальная точка траектории, соответствующая моменту времени  $t = t_0$ , задается начальными условиями — значениями  $U_0$  и  $I_0$ . Конечная точка траектории, соответствующая моменту времени  $t = \infty$ , определяется состоянием (точкой) равновесия. В линейной автономной цепи, не содержащей источников постоянного напряжения и тока, будем иметь только одну точку равновесия в начале координат. К этому выводу можно прийти, рассматривая полученные решения. Выражения (6.15) и (6.16) обращаются в нуль при  $t \rightarrow \infty$ , если  $\lambda_1 > 0$  и  $\lambda_2 > 0$ , и при  $t \rightarrow -\infty$ , если  $\lambda_2 < 0$  и

(или)  $\lambda_1 < 0$ . Последнее означает, что траектории будут направлены от точки равновесия. Аналогично выражения (6.20) и (6.21) обращаются в нуль при  $t \rightarrow \infty$ , если  $\alpha > 0$ , и при  $t \rightarrow -\infty$ , если  $\alpha < 0$ . Если траектории направлены от точки равновесия, то имеем неустойчивую точку равновесия; при этом траектория будет направлена от начальной точки в бесконечность.

Дифференциальное уравнение, определяющее форму траекторий, можно получить, взяв отношение уравнений (6.9)

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}. \quad (6.22)$$

Это уравнение дает значение углового коэффициента, т. е. наклона траектории в каждой точке плоскости  $x_1 - x_2$ .

В рассматриваемом случае линейного колебательного контура уравнение фазовых траекторий согласно (6.11) имеет вид

$$di/du_c = -C/L(u_c/i + R). \quad (6.23)$$

Уравнение допускает простое решение лишь в частном случае контура без потерь ( $R = 0$ ), когда переменные разделяются и уравнение траекторий представляется выражением

$$\rho^2 \dot{i}^2 + u_c^2 = K^2,$$

где  $\rho = \sqrt{L/C}$ .

Траектории имеют форму эллипсов, т. е. замкнутых кривых, изображающих незатухающие синусоидальные собственные колебания.

Для всех остальных режимов контура с потерями (положительными или отрицательными) решение уравнения (6.23) затруднительно. Но для простого линейного контура нами получены решения  $i(t)$  и  $u_c(t)$ . Поэтому в принципе траектории в данном случае можно построить по известным выражениям переменных. Каждая пара значений переменных  $i(t_i)$  и  $u_c(t_i)$  для некоторого момента  $t_i$  определяет точку траектории на фазовой плоскости. Задаваясь значениями  $t_i$  в пределах от 0 до  $\infty$  (или от  $-\infty$  до 0), можно построить траекторию. Если имеются графики  $u_c(t)$  и  $i(t)$ , то ординаты кривых при  $t = t_i$  дадут координаты соответствующей точки траектории. Построение траекторий по известным решениям, сводящееся к исключению времени из выражений переменных, используется в основном для уяснения смысла и некоторых свойств траекторий на фазовой плоскости.

Решение главной задачи — построения траекторий уравнений нелинейных автономных систем, не имеющих аналитического решения, связано со значительными трудностями.

Здесь очень важно определить сначала все точки устойчивого или неустойчивого равновесия и выяснить общую картину расположения траекторий в окрестности этих точек. Поскольку вблизи точек равновесия можно иметь дело с линеаризованными уравнениями, представляет интерес исследование вида траекторий линейной цепи второго порядка на основе приведенных решений.

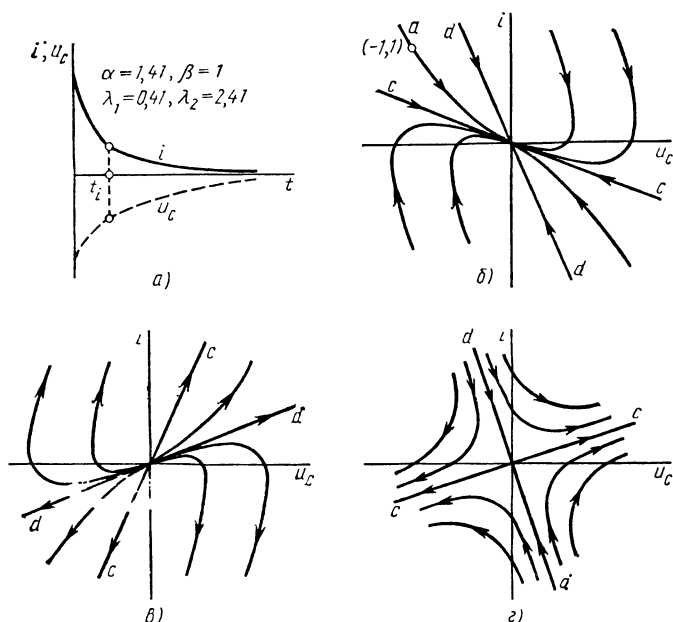


Рис. 6.7

Рассмотрим конфигурацию траекторий в окрестности особых точек для двух режимов: аperiodического и колебательного. Для некоторого упрощения выражений примем нормированные численные значения:  $\omega_0 = 1$  и  $\rho = 1$  (или  $L = 1$  и  $C = 1$ ). При этом коэффициент затухания  $\alpha = R/2$  и уравнение траектории (6.23) запишем в виде

$$di/du_c = -(u_c/i + 2\alpha). \quad (6.24)$$

**Апериодический режим** ( $|\alpha| > \omega_0 = 1$ ). Корни характеристического уравнения вещественны. На рис. 6.7, а для иллюстрации построены графики тока и напряжения для  $\alpha = \sqrt{2}$ ;  $\lambda_1 = 0.41$ ;  $\lambda_2 = 2.41$ ; вычисленные согласно (6.15) и (6.16) при начальных условиях  $U_0 = -1$ ;  $I_0 = 1$ . На рис. 6.7, б по орди-

натам кривы соответствующа траектория  $a$ , направленная при  $t \rightarrow \infty$  к началу координат — устойчивой точкой равновесия.

Исследуем траекторию в окрестности начала координат в более общем виде. Покажем, что имеются траектории, лежащие на прямой  $i = ku_c$ , где  $k$  — угловой коэффициент (наклон). Согласно (6.24) имеем

$$k = -\left(\frac{1}{k} + 2\alpha\right).$$

Отсюда получаем два значения наклона, численно равные корням характеристического уравнения

$$k_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1} = -\lambda_{1,2}, \quad (6.25)$$

и соответственно две прямые, положение которых зависит от знаков и значений корней характеристического уравнения.

При  $\alpha = \sqrt{2} > 0$  имеем два отрицательных корня и наклоны:  $k_1 = -0,41$ ;  $k_2 = -2,41$ ; при  $\alpha = -\sqrt{2} < 0$  — два положительных корня и наклоны:  $k_1 = 2,41$ ;  $k_2 = 0,41$ ; при  $\alpha = \sqrt{2}$  и  $\omega_0 = -1$  — два вещественных корня с разными знаками:  $k_1 = 0,318$ ;  $k_2 = -3,15$ . На этих прямых, изображенных на фазовых плоскостях рис. 6.7, б, в, г линиями  $c$  и  $d$ , располагаются четыре траектории, направленные к точке или от точки равновесия в зависимости от того, является ли она устойчивой или неустойчивой.

Указанные траектории в виде прямых линий соответствуют тем случаям, когда выражения переменных состояния состоят не из двух слагаемых-экспонент, а только из одной экспоненты. Для обращения в нуль коэффициента у одной из экспонент необходимо, чтобы начальные значения тока и напряжения удовлетворяли условиям:  $\lambda_1 I_0 = -U_0$  или  $\lambda_2 I_0 = -U_0$ . Подставив эти значения в (6.15) и (6.16), получим уравнения траекторий — прямых в виде:  $i/u_c = -\lambda_2$ ;  $i/u_c = -\lambda_1$ , что подтверждает ранее найденные равенства (6.25). В первом случае выражения  $i$  и  $u_c$  состоят из экспоненты  $\exp(-\lambda_2 t)$ , во втором — из  $\exp(-\lambda_1 t)$ . Если экспонента затухает ( $\lambda_i > 0$ ), то траектории направлены к точке равновесия ( $c$  и  $d$  на рис. 6.7, б;  $c$  — на рис. 6.7, г); в противном случае ( $\lambda_i < 0$ ) — от точки равновесия ( $c$  и  $d$  на рис. 6.7, в;  $d$  — на рис. 6.7, г).

Все остальные траектории представлены кривыми линиями. Выясним направления траекторий при  $t \rightarrow \pm \infty$ , рассматривая отношение  $i/u_c$ , которое можно представить согласно (6.15) и

(6.16), обозначив коэффициенты выражения (6.16) через  $p$  и  $q$ , так:

$$\frac{i}{u_c} = \frac{-\lambda_1 p - \lambda_2 q e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t}}{p - q e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t}} = \frac{\lambda_2 q - \lambda_1 p e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)t}}{-q + p e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)t}}. \quad (6.26)$$

Рассмотрим три случая значений вещественных корней характеристического уравнения.

1. Оба корня отрицательны:  $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ ; начало координат — устойчивая точка равновесия. При  $t \rightarrow \infty$  из (6.26) имеем:  $i/u_c = -\lambda_1 = k_1$  — траектории приближаются к началу координат (рис. 6.7, б), касаясь прямой  $c$  с угловым коэффициентом  $k_1 = -\lambda_1$ . При  $t \rightarrow -\infty$   $i/u_c = -\lambda_2 = k_2$  — траектории в удаленных точках имеют направления, параллельные прямой  $d$  с угловым коэффициентом  $k_2$ .

2. Оба корня положительны:  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ ; начало координат — неустойчивая точка равновесия. Траектории будут удаляться от начала координат (рис. 6.7, в), касаясь прямой  $d$  с угловым коэффициентом  $k_2$ , так как при  $t \rightarrow -\infty$ , когда траектория находится в начале координат, согласно (6.26)  $i/u_c = -\lambda_2$ . В удаленной от начальной точки области ( $t \rightarrow \infty$ ) траектории будут параллельны прямой  $c$ , так как  $i/u_c = -\lambda_1$ .

3. Корни различны по знаку:  $\lambda_1 < 0$ ;  $\lambda_2 > 0$ . Начало координат — неустойчивая точка равновесия. Траектории, лежащие на прямой  $d$  и соответствующие затухающей экспоненте, направлены к началу, а траектории на прямой  $c$  и соответствующие нарастающей экспоненте — от начала (рис. 6.7, г). Из (6.26) следует, что при  $t \rightarrow -\infty$   $i/u_c = -\lambda_2$  траектории параллельны прямой  $d$  и направлены к началу, а при  $t \rightarrow \infty$  — параллельны прямой  $c$  и направлены от начала. Как видно из рис. 6.7, г, траектории (кроме лежащих на прямых  $c$  и  $d$ ) сначала приближаются к началу, а затем, не достигнув точки равновесия, удаляются от нее. Это своеобразное поведение траекторий объясняется тем, что процессы определяются наложением двух экспонент — затухающей и нарастающей.

Прямые линии  $c$  и  $d$ , как показано на рис. 6.7, г, разделяют фазовую плоскость на области с различными направлениями траекторий. Такие линии называют сепаратрисами.

**Колебательный режим** ( $|\alpha| < \omega_0 = 1$ ). Корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные. Рассмотрим также три случая значений корней.

1. Корни характеристического уравнения, комплексно-сопряженные с отрицательными вещественными частями:  $\alpha > 0$ ;  $\omega_d < \omega_0$ .



Решения согласно (6.20) и (6.21) имеют вид затухающих по экспоненте гармонических колебаний. На рис. 6.8, а приведены графики напряжения и тока, а на рис. 6.8, б — траектории, имеющие вид спиралей, охватывающих точку равновесия и сходящихся к ней после нескольких оборотов.

2. Корни характеристического уравнения, комплексно-сопряженные с положительными вещественными частями:  $\alpha < 0$ ;  $\omega_d < \omega_0$ .

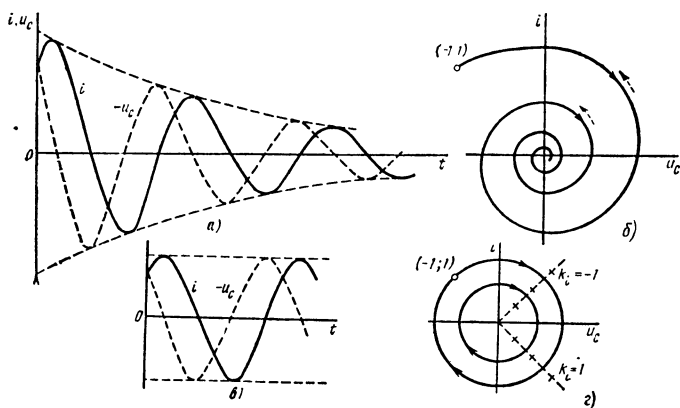


Рис. 6.8

Решения имеют вид нарастающих по экспоненте гармонических колебаний и отличаются от предыдущих решений только знаком показателя экспоненты. Соответственно траектории также имеют вид спиралей (рис. 6.8, б), но направленных от начала координат (пунктирные стрелки).

3. Корни характеристического уравнения мнимые сопряженные:  $\alpha = 0$ ;  $\omega_d = \omega_0$  — контур без потерь.

Решения имеют вид установившихся гармонических колебаний и согласно (6.20) и (6.21) могут быть записаны в общем виде (рис. 6.8, в):

$$u_c = U_0 \cos \omega_0 t - \rho I_0 \sin \omega_0 t = U \cos (\omega_0 t + \alpha);$$

$$i = I_0 \cos \omega_0 t + \frac{U_0}{\rho} \sin \omega_0 t = I \sin (\omega_0 t + \alpha),$$

где

$$I = \sqrt{I_0^2 + U_0^2/\rho^2}; \quad U = \rho I; \quad \alpha = \arctg \rho I_0/U_0.$$

Если оба выражения возвести в квадрат и сложить, то время исключается и получается уравнение фазовой траектории,

связывающее переменные состояния и совпадающее с ранее выведенным

$$\frac{1}{\rho^2} u^2 + \dot{v}^2 = \frac{1}{\rho^2} x_1^2 + x_2^2 = I^2.$$

Фазовые траектории имеют вид эллипсов с центром в точке равновесия (начале координат); при нормированном значении  $\rho = 1$  фазовые траектории являются окружностями с центром в начале координат (рис. 6.8, з). Радиусы траекторий равны  $I = \sqrt{I_0^2 + U_0^2/\rho}$ , т. е. определяются начальным запасом энергии.

Как видим, периодическим гармоническим режимам соответствуют замкнутые эллиптические или круговые траектории на фазовой плоскости. Вообще для *любых периодических режимов траектории представляются замкнутыми линиями*. Чем больше доля гармоник в спектре колебания, тем сильнее отличается форма замкнутой траектории от эллипса.

Периодические режимы в линейных автономных цепях возможны только при отсутствии потерь (консервативные системы), когда начальный запас энергии не расходуется, а сохраняется. Характерным для незатухающих колебаний в линейных цепях является то, что амплитуда и частота колебаний однозначно определяются соответственно начальными условиями и параметрами цепи. При этом достаточно внесения небольших потерь, чтобы нарушилась стационарность колебаний и, следовательно, замкнутость траекторий.

Характерным для линейных цепей является следующее положение: если известно направление траекторий в окрестности единственной точки равновесия, то качественно можно указать поведение траекторий на всей плоскости, т. е. при любых начальных условиях.

В случаях, когда одна из переменных состояния является производной от другой (как в приведенных примерах траекторий), фазовые траектории обладают следующими свойствами.

Нарастанию величины  $x_1$ , т. е. перемещению изображающей точки слева направо, соответствуют положительная производная и расположение точки в верхней полуплоскости. Убыванию величины  $x_1$ , т. е. перемещению изображающей точки справа налево, соответствуют отрицательная производная и расположение точки в нижней полуплоскости. Если величина  $x_1$  неизменна, то скорость ее изменения (производная) равна нулю (ось  $x_1$ ), так что фазовая траектория пересекает ось абсцисс под прямым углом. Необходимо отметить, что, поскольку рассматриваемые дифференциальные уравнения имеют единственное решение, фазовые траектории не могут пересекаться.

## § 6.5. Точки равновесия и предельные циклы на плоскости состояния

Очень большое значение при построении и исследовании поведения траекторий на плоскости состояний, так же как и на оси состояний, имеет предварительное определение точек равновесия системы уравнений и выяснение направления траекторий в окрестности этих точек. При использовании линеаризации оказывается возможным установить в общем виде характер изменения траекторий в окрестности всех особых точек (точек равновесия), в которых производные от переменных по времени равны нулю.

Пусть состояние равновесия для автономных систем второго порядка изображается точкой равновесия с координатами

$$x_1 = \lambda_1; \quad x_2 = \lambda_2. \quad (6.27)$$

Эти значения координат обращают в нуль правые части уравнений состояния (6.9):

$$f_1(\lambda_1, \lambda_2) = 0; \quad f_2(\lambda_1, \lambda_2) = 0.$$

Нас интересует поведение траекторий в непосредственной близости от точки равновесия (6.27). В окрестности этой точки нелинейные члены правых частей системы (6.9), очевидно, можно разложить в ряд Тейлора, ограничиться линейными членами и с учетом (6.27) записать

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= \alpha_1(x_1 - \lambda_1) + \alpha_2(x_2 - \lambda_2); \\ f_2(x_1, x_2) &= \beta_1(x_1 - \lambda_1) + \beta_2(x_2 - \lambda_2), \end{aligned}$$

где  $\alpha_i, \beta_i$  — значения частных производных от  $f_1$  и  $f_2$  по  $x_1$  и  $x_2$  в точке равновесия.

Удобно перенести начало координат в точку равновесия, т. е. перейти к новым переменным

$$y_1 = x_1 - \lambda_1; \quad y_2 = x_2 - \lambda_2. \quad (6.28)$$

Такая подстановка обеспечивает расположение точки равновесия в начале координат:  $y_1 = 0$  и  $y_2 = 0$  при  $x_1 = \lambda_1$  и  $x_2 = \lambda_2$ .

С учетом (6.28) линеаризованные уравнения состояния, справедливые в окрестности начала координат, расположенного в точке равновесия, запишем в виде:

$$\begin{cases} dy_1/dt = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2; \\ dy_2/dt = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2. \end{cases} \quad (6.29)$$

Уравнением траектории в окрестности начала координат будет

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2}{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2}.$$

Поведение траектории в окрестности точки равновесия определяется видом решений для  $y_1$  и  $y_2$ . Чтобы установить вид решения линеаризованной системы уравнений состояния (6.29), найдем характеристическое уравнение. Положив в (6.29)  $p = d/dt$ , имеем

$$\left. \begin{aligned} (p - \alpha_1) y_1 - \alpha_2 y_2 &= 0; \\ -\beta_1 y_1 + (p - \beta_2) y_2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Определитель этой системы является характеристическим полиномом

$$\Delta = p^2 - (\alpha_1 + \beta_2)p + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) = p^2 + b_1p + b_2.$$

По знаку коэффициентов полинома можно сразу установить условия устойчивости точки равновесия (начала координат) — если коэффициенты полинома положительны, то точка равновесия устойчива:

$$b_1 = -(\alpha_1 + \beta_2) > 0; \quad b_2 = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_2) > 0. \quad (6.30)$$

Сравнивая характеристический полином  $\Delta$  с характеристическим полиномом уравнения (6.12) линейного  $RLC$ -контура, приходим к выводу, что оба полинома получаются идентичными, если принять  $b_1 = 2\alpha$  и  $b_2 = \omega_0^2$ . Следовательно, искомое решение свободного режима для линеаризованной системы (6.29) будет идентичным свободному режиму в активном  $RLC$ -контуре. Поэтому при исследовании поведения траекторий вблизи точки равновесия можно воспользоваться готовыми результатами, приведенными в предыдущем параграфе, где рассмотрены все возможные виды корней характеристического уравнения. Необходимо помнить, что приведенные на рис. 6.7 и 6.8 траектории линейной цепи применимы к точкам равновесия нелинейных уравнений только в непосредственной близости к этим точкам.

В зависимости от поведения траекторий, определяемого видом двух корней характеристического уравнения линеаризованной системы, точкам уравнения присваивают следующие наименования:

**устойчивый узел** — корни вещественны и отрицательны; траектории при  $t \rightarrow \infty$  сходятся к точке равновесия, не охватывая этой точки (см. рис. 6.7, б);

**неустойчивый узел** — корни вещественны и положительны; траектории направлены от точки равновесия, не охватывая ее, или направлены к точке равновесия при  $t \rightarrow -\infty$  (см. рис. 6.7, в);

**седло** — корни вещественны и различны по знаку; траектории из двух областей, вначале направленные к точке рав-

новесия, затем удаляются, не достигнув ее, также в две другие области (см. рис. 6.7, *з*);

у с т о й ч и в ы й ф о к у с — корни, комплексно-сопряженные с отрицательными вещественными частями; траектории сходятся к точке равновесия, охватывая ее в виде спиралей (см. рис. 6.8, *б*);

н е у с т о й ч и в ы ф о к у с — корни, комплексно-сопряженные с положительными вещественными частями; траектории направлены от точки равновесия, охватывая ее в виде спиралей, или направлены к точке равновесия при  $t \rightarrow -\infty$  (см. рис. 6.8, *б* — пунктирные стрелки);

ц е н т р — корни мнимые сопряженные; траектории имеют вид замкнутых кривых — эллипсов, охватывающих точку равновесия (см. рис. 6.8, *з*).

Теперь, когда классифицировано поведение траекторий вблизи точек равновесия, необходимо отметить свойства траекторий нелинейных систем, связанные с особыми точками. Прежде всего точки равновесия являются точками, к которым сходятся все траектории. Траектория, исходящая из любой точки, изображающей начальное состояние, направляется к одной из точек равновесия в зависимости от того, в какой области плоскости расположена начальная точка.

Если начальные точки расположены в некоторой области плоскости, то траектории могут сходить к одной из точек равновесия; если же они лежат вне этой области, то траектории могут сходить к другим точкам. Вблизи границы областей траектории имеют различные направления. Даже при наличии одного состояния равновесия в одной области фазовой плоскости траектории могут быть направлены к точке равновесия, а в другой — от точки равновесия. Граничную линию, отделяющую области с различными направлениями фазовых траекторий, называют, как указывалось, сепаратрисой.

Если все траектории направлены к точке равновесия, то точка является устойчивой. Соответствующий этой точке установившийся режим будет достигаться при  $t \rightarrow \infty$ . Если же все траектории направлены от точки равновесия, то точка является неустойчивой. Можно считать, что режим, соответствующий такой точке, достигается при  $t \rightarrow -\infty$ .

Остановимся на очень важном свойстве траекторий, связанном с явлением возникновения в нелинейных автономных цепях установившихся незатухающих колебаний, называемых автоколебаниями (явлением генерации колебаний).

Следует отметить существенное отличие автоколебаний в нелинейных цепях от установившихся свободных колебаний в цепях без потерь (консервативных цепях), основные свойства

которых были отмечены в предыдущем параграфе. Автоколебания могут установиться в цепях с потерями (диссипативных цепях). Для автоколебаний характерно следующее: 1) амплитуда колебаний не зависит от начальных условий; 2) изменение параметров системы в широких пределах может не влиять на существование колебаний; 3) периодические колебания, как правило, не являются гармоническими, а содержат наряду с основной высшие гармоники.

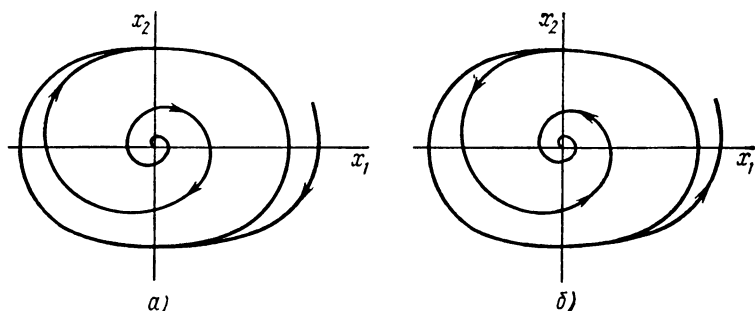


Рис. 6.9

Замкнутую траекторию, изображающую указанные установившиеся колебания в нелинейной системе, называют предельным циклом (рис. 6.9). Замкнутые траектории в виде предельных циклов можно подразделить на три типа:

устойчивый предельный цикл — все траектории, примыкающие к нему с внутренней и внешней сторон, направлены к замкнутой кривой (рис. 6.9, а);

неустойчивый предельный цикл — все траектории как с внутренней, так и с внешней стороны направлены от замкнутой кривой (рис. 6.9, б);

полустойчивый предельный цикл — траектории с внутренней или внешней стороны направлены к замкнутой кривой, а траектории с внешней или внутренней стороны — от замкнутой кривой.

Следует отличать замкнутые траектории, изображающие свободные колебания в цепях без потерь, от предельных циклов, изображающих автоколебательные процессы. Первые при малых изменениях начального запаса энергии будут представляться близко расположенными охватывающими друг друга не соприкасающимися замкнутыми линиями. В непосредственной же близости от предельных циклов не могут располагаться другие замкнутые траектории, ближайшие траекто-

рии — разомкнутые, касаются предельного цикла — направлены к нему или от него.

В заключение дадим интерпретацию с помощью траекторий определения устойчивости в малом точек равновесия автономных цепей (см. § 5.6).

На рис. 6.10, а показана траектория процесса в окрестности точки, устойчивой по Ляпунову: изображающая точка при всех значениях  $t > t_0$  не выходит за пределы

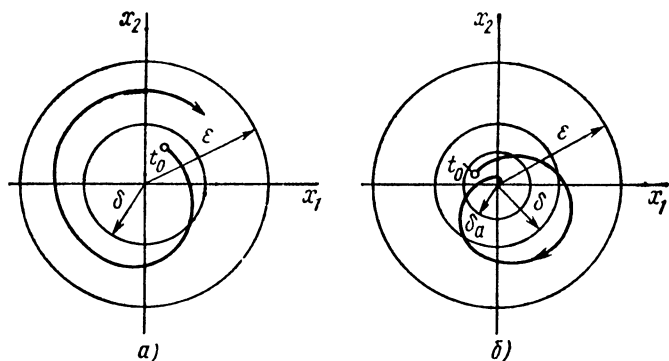


Рис. 6.10

окружности или обобщенно за пределы  $n$ -мерной сферы малого радиуса  $\epsilon$ , если точка в начальный момент  $t = t_0$  находилась в пределах  $n$ -мерной сферы радиуса  $\delta$ , зависящего только от  $\epsilon$ . К точке указанного типа можно отнести центр.

На рис. 6.10, б показана траектория процесса в окрестности асимптотически устойчивой точки: изображающая точка, начав при  $t = t_0$  движение в пределах  $n$ -мерной сферы радиуса  $\delta_a$ , не выходит при всех значениях  $t > t_0$  за пределы сферы радиуса  $\epsilon$  и, кроме того, стремится к точке равновесия при  $t \rightarrow \infty$ . К асимптотически устойчивым точкам относятся узел и фокус.

Приведенное здесь обобщение на случай  $n$ -мерного пространства является полезным для получения наглядного геометрического представления процессов в цепях высокого порядка.

## § 6.6. Построение траекторий на плоскости состояния

Примененный ранее способ построения фазовых траекторий непосредственно по решению уравнения, очевидно, можно использовать лишь в тех редких случаях, когда уравнения до-

пускают аналитическое решение. В общем случае аналитическое решение невозможно получить и траектории следует строить по заданной системе уравнений. Задача построения траекторий существенно усложняется. Лишь в некоторых частных случаях, когда уравнения цепи второго порядка имеют особый вид, траектории могут быть построены относительно просто. Сюда можно отнести цепи без потерь (консервативные цепи). Уравнения, описывающие поведение таких цепей, не содержат первой производной, которая обуславливается затуханием (потерями). Поэтому для автономной цепи второго порядка будем иметь уравнение

$$d^2x/dt^2 + f(x) = 0. \quad (6.31)$$

Положив  $x_1 = x$ , получим уравнения состояния нормально-го вида  $\dot{x}_1 = x_2$ ;  $\dot{x}_2 = -f(x_1)$ .

Интегрирование отношения этих уравнений

$$dx_2/dx_1 = -f(x_1)/x_2$$

дает уравнение фазовой траектории

$$\frac{x_2^2}{2} + \int_{x_{10}}^{x_1} f(x_1) dx_1 = K. \quad (6.32)$$

Слагаемые имеют смысл энергии: первое слагаемое — кинетической энергии (квадрат скорости), а второе — потенциальной энергии, так что постоянная интегрирования  $K$  является полной энергией, величина которой, определяемая начальными условиями, остается неизменной. Рассмотренный в § 6.4 линейный  $LC$ -контур представляет простейший пример линейной консервативной цепи.

В качестве примера нелинейной консервативной цепи построим траектории для колебательного контура без потерь из линейной емкости и нелинейной индуктивности (рис. 6.11, а). Примем для нелинейной индуктивности характеристику вида

$$i = m\Psi^5. \quad (6.33)$$

Для указанных на схеме положительных направлений тока в контуре и напряжения на емкости уравнения состояния можно записать на основании первого и второго законов Кирхгофа:

$$i_C - i = 0; \quad u_C + u_L = u_C + d\Psi/dt = 0$$

или

$$duc/dt = i/C; \quad di/dt = -uc/L \quad (i). \quad (6.34)$$

Динамическую индуктивность получим, продифференцировав (6.33):

$$di/d\Psi = 5m\Psi^4 = 5m^{1/5} i^{4/5}.$$



Отсюда

$$L(i) = \frac{d\Psi(i)}{di} = \frac{1}{5m^{1/5}} i^{-4/5}. \quad (6.35)$$

Отношение уравнений (6.34) дает уравнение фазовой траектории

$$\frac{du_C}{di} = \frac{-iL(i)}{Cu_C} = \frac{-i^{1/5}}{5m^{1/5} Cu_C}$$

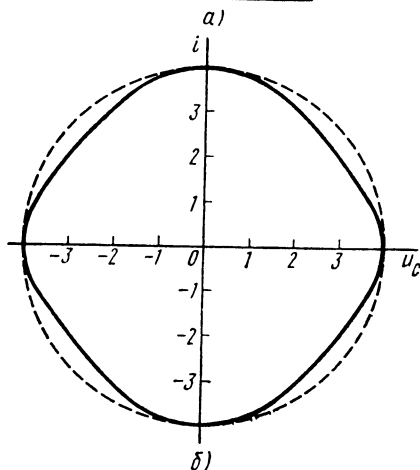
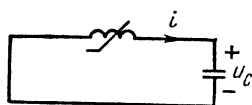


Рис. 6.11

ветствующая установившемуся колебанию в контуре без потерь, приведена на рис. 6.11, б. Ее форма отличается от круговой траектории (пунктирная линия), получающейся в случае гармонического колебания.

Общим методом построения траекторий, применимым для любых уравнений автономной цепи второго порядка, является метод изоклин.

Фазовая траектория описывается дифференциальным уравнением первого порядка, не содержащим времени. Уравнение траектории получается делением уравнений состояния (6.9) второго на первое

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}. \quad (6.37)$$

или после интегрирования

$$\frac{u_C^2}{2} + \frac{1}{6m^{1/5} C} i^{6/5} K,$$

где  $K$  — постоянная интегрирования, определяемая по заданным начальным значениям  $u_C(0)$  и  $i(0)$ .

Отсюда уравнение фазовой траектории

$$u_C^2 = 2K - \frac{1}{3m^{1/5} C} i^{6/5}. \quad (6.36)$$

Построим фазовую траекторию для конкретных значений параметров уравнения. Приняв  $K = 8$  и  $3m^{1/5} C = 4^{-4/5}$ , для уравнения траектории имеем

$$i = 4^{-2/3} (16 - u_C^2)^{5/6}.$$

При  $i = 0$  напряжение на емкости  $u_C = 4$ , а при  $u_C = 0$  ток в контуре  $i = 4$ . Построенная по вычисленным точкам замкнутая траектория, соот-

Так как в общем случае это уравнение, определяющее наклон касательной к фазовой траектории в любой точке, аналитически неразрешимо, для его решения применяют графический метод, называемый методом изоклин. Метод основан на использовании геометрического смысла производной как углового коэффициента или тангенса угла наклона касательной в точке  $(x_1, x_2)$  кривой (траектории), изображающей решение и называемой интегральной кривой. Изоклина представляет линию, которая пересекается траекториями под одинаковыми углами, так что

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} = k_i,$$

где  $k_i$  — угловой коэффициент касательной к траектории, постоянный на изоклине.

Отсюда уравнением изоклины — линии постоянного наклона — будет

$$f_2(x_1, x_2) = k_i f_1(x_1, x_2). \quad (6.38)$$

Для любого фиксированного значения углового коэффициента  $k_i$  касательной к траектории по уравнению (6.38) строят кривую — изоклину, на которой заносят линейные элементы — короткие отрезки прямых одинакового направления. Построив изоклины и линейные элементы различных угловых коэффициентов, получают поле направлений на плоскости состояния. Траекторию вычерчивают таким образом, чтобы ее участки в каждой точке совпали с направлением линейного элемента. Если поле направлений построено в некоторой области, то для этой области плоскости состояния можно получить семейство траекторий, т. е. «фазовый портрет». Для облегчения построения траекторий необходимо предварительно нанести на фазовой плоскости особые точки и траектории в их окрестностях в зависимости от типа точек.

Для иллюстрации сущности метода изоклин рассмотрим простейшие уравнения линейного последовательного контура без потерь на индуктивности и емкости, которые согласно (6.11) при  $R = 0$  и  $x_1 = u_C$ ,  $x_2 = i$  имеют вид

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{C} \dot{x}_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{L} x_1.$$

Уравнение изоклины (6.38) перепишем таким образом:

$$x_2 = -\frac{C}{L} \cdot \frac{x_1}{k_i} = -\frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{x_1}{k_i}.$$

Изоклины представляют прямые, проходящие через начало координат, с угловым коэффициентом, обратным по величине и знаку угловому коэффициенту касательной к траектории:

$$k = -1/k_i \rho^2.$$

При  $\rho = \sqrt{L/C} = 1$  изоклина и касательная к траектории взаимно перпендикулярны и траектории представляются окружностями. На рис. 6.8, а показаны изоклины и перпендикулярные им линейные элементы с  $k_i = \pm 1$ .

Рассмотрим пример построения изоклин для уравнения лампового генератора (уравнение Ван-дер-Поля), полученного в § 5.4. Нормированному уравнению (5.37) соответствуют уравнения состояния нормального вида при  $x_1 = x$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -\mu(x_1^2 - 1)x_2 - x_1. \end{aligned} \right\} \quad (6.39)$$

Характер процессов существенно зависит от величины  $\mu$ , определяемой параметрами элементов цепи. Уравнение изоклины (6.38) для системы (6.39) запишем в виде

$$k_i x_2 = -\mu(x_1^2 - 1)x_2 - x_1; \quad x_2 = \frac{x_1}{\mu(1 - x_1^2) - k_i}, \quad (6.40)$$

или, если принять  $\mu = 0,25$ , имеем

$$x_2 = \frac{x_1}{0,25(1 - x_1^2) - k_i}.$$

На рис. 6.12 изображены изоклины и линейные элементы для следующих значений угловых коэффициентов: 0; -1; 1. По направлениям касательных построены траектории. Характерным здесь является наличие замкнутой траектории — устойчивого предельного цикла, к которому направлены траектории как с внутренней, так и с внешней стороны. Наличие предельного цикла означает, что при принятых параметрах существуют установившиеся колебания. Для более точного построения траекторий следует построить большее число изоклин.

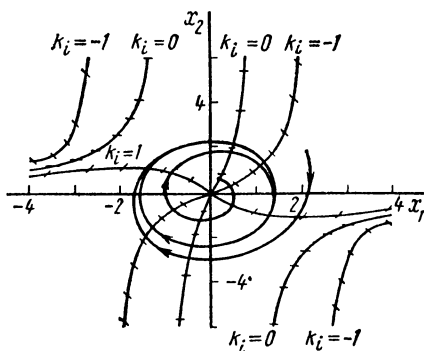


Рис. 6.12

Построение траекторий по методу изоклин требует трудоемких расчетов. В ряде случаев траектории можно построить с помощью более простых приемов.

Рассмотрим метод построения фазовых траекторий по Л ь е н а р у. Метод применяется для ограниченного, но очень важного, часто встречающегося класса уравнений второго порядка, описывающих поведение цепей с линейными реактивными и нелинейными резистивными элементами. Уравнения таких цепей имеют вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \varphi \left( \frac{dx}{dt} \right) + x = 0. \quad (6.41)$$

Нелинейный член в уравнении является функцией только первой производной и обусловлен характеристикой резистивного элемента. В случае последовательного *RLC*-контура слагаемое  $\varphi(i) = \varphi(\dot{q})$  пропорционально значению напряжения на резисторе, зависящего от тока. В качестве переменной здесь следует принять заряд. В случае параллельного контура в качестве переменной должно быть выбрано потокосцепление; слагаемое  $\varphi(\dot{\Psi}) = \varphi(u)$  будет пропорционально величине тока резистора, зависящей от напряжения. Положив  $x_1 = x$  и  $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}$ , запишем (6.41) в форме уравнений состояния нормального вида:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \varphi(x_2), \end{aligned} \right\} \quad (6.42)$$

где  $x_2$  — ток или напряжение. Уравнение изоклины имеет вид

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_1 + \varphi(x_2)}{x_2}. \quad (6.43)$$

Построение траектории здесь производится без нанесения семейства изоклин. Сначала на фазовой плоскости (см. рис. 6.13) строят по точкам линию нулевой изоклины, уравнением которой согласно (6.43) является  $x_1 = \varphi(x_2)$ .

Эту функцию, пропорциональную вольт-амперной характеристике резистивного элемента, строят в зависимости от величины  $x_2$ , которую откладывают по оси ординат (рис. 6.13). Точка пересечения линии нулевой изоклины с осью абсцисс, где  $x_2 = \dot{x}_1 = 0$ , является точкой равновесия системы.

Чтобы найти направление траектории в точке  $m$  с ординатой  $x_{2m}$ , проводят через нее горизонтальную линию и определяют с помощью кривой нулевого наклона значение  $\varphi(x_{2m})$  в точке пересечения  $p$ ; проекция  $O'$  этой точки на ось абсцисс

циент касательной:

$$= \frac{mp}{pO'} = \frac{-x_{1m} + \varphi(x_{2m})}{x_{2m}}.$$

хождения отрезка траектории

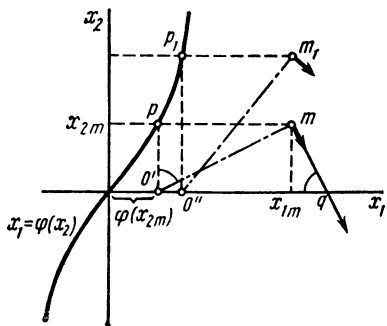
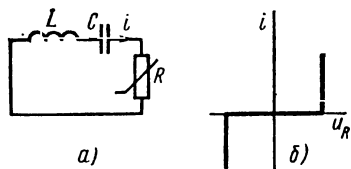


Рис 6 13

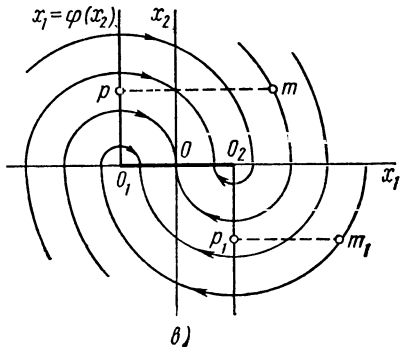


Рис. 6.14

При использовании метода Льюенара необходимо предва-

Рассмотрим пример построения траектории по методу Лье-

того чтобы получить уравнение вида (6.41), где нелинейный член зависит от производной, уравнение цепи следует записать через заряд:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + u_R(dq/dt) + \frac{1}{C} q = \sqrt{L/C} \left[ \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{d^2 q}{dt^2} + \sqrt{C/L} u_R(dq/dt) + \omega_0 q \right] = 0,$$

где  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

Далее необходимо принять  $x_1 = \omega_0 q$  и  $x_2 = \omega_0^{-1} \dot{x}_1 = \dot{q}$ . Тогда уравнения состояния запишем в виде (6.42)

$$x_1 = \omega_0 x_2; \quad x_2 = -\omega_0 [x_1 - \varphi(x_2)],$$

где

$$\varphi(x_2) = -\sqrt{C/L} u_R(x_2). \quad (6.44)$$

Уравнение нулевой изоклины

$$x_1 = \psi(x_2) = -\sqrt{C/L} u_R(x_2) \quad (6.45)$$

будет представляться двумя параллельными оси ординат отрезками прямых, поскольку значение  $x_1$  пропорционально зависимости напряжения на резисторе от тока, взятой с обратным знаком; при  $x_2 = i > 0$  отрезок прямой находится во втором, а при  $x_2 = i < 0$  — в четвертом квадрантах (рис. 6.14, в). К линии нулевой изоклины относится также горизонтальный участок прямой, совпадающий с осью абсцисс и соединяющий точки пересечения  $O_1$  и  $O_2$  вертикальных участков с координатной осью  $x_1$ . Все точки этого отрезка являются точками пересечения линии нулевой изоклины с осью  $x_1$  и, следовательно, точками равновесия. Здесь состояния равновесия получаются не в виде отдельных изолированных точек, а в виде отрезка прямой, представляющей непрерывную последовательность точек. Обобщением подобных непрерывных состояний равновесия при большом числе переменных являются зоны или области в  $n$ -мерном пространстве.

Для рассматриваемой линии нулевой изоклины в виде двух вертикальных отрезков прямой строить траектории особенно просто. Применяя построения, приведенные на рис. 6.13, легко убедиться, что для всех точек верхней полуплоскости имеется единственный центр  $O_1$ , а для всех точек нижней полуплоскости — также единственный центр  $O_2$ . Следовательно, траектории в верхней и нижней полуплоскостях будут представляться concentрическими полуокружностями, проведенными из центров  $O_1$  и  $O_2$  соответственно (см. рис. 6.14, в). Как

видим, при больших начальных значениях  $x_1(0)$  и  $x_2(0)$  траектория состоит из нескольких полуокружностей верхней и нижней полуплоскостей с уменьшающимися радиусами. Если радиус полуокружности становится меньше длины отрезка  $O_1O_2$ , то траектории попадают на линию равновесия, что означает прекращение изменений переменных во времени. При этом установившиеся значения переменных равны:  $x_2(\infty) = 0$ ,  $x_1(\infty) = X_1$ , где  $X_1$  в зависимости от начальных условий, определяющих траекторию, может принимать любые значения в пределах, пропорциональных отрезкам  $-OO_1 \div +OO_2$ .

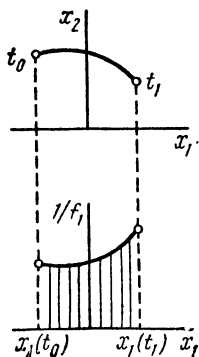


Рис. 6.15

В заключение остановимся на определении шкалы времени для траекторий, т. е. моментов времени для отдельных точек траектории. Если траектории получены на основе исходных уравнений без их решения, то требуются дополнительные вычисления для нахождения указанных значений времени. Опишем один из способов определения времени для точек траектории.

Пусть задан участок траектории  $x_2 = \varphi(x_1)$  (рис. 6.15), который начинается в точке  $x_1(t_0)$ ,  $x_2(t_0)$ , соответствующей моменту времени  $t_0$ . Для определения времени  $t$ , соответствующего ближайшей точке  $x_1(t_1)$ ,  $x_2(t_1)$ , можно воспользоваться одним из уравнений состояния (6.9), например первым, которое для точек траектории можно записать так

$$dx_1/dt = f_1(x_1, x_2) = f_1[x_1, \varphi(x_1)].$$

Проинтегрировав это уравнение, найдем время  $t_1$ , соответствующее точке  $x_1(t_1)$ ,  $x_2(t_1)$  траектории:

$$t_1 = t_0 + \int_{x_1(t_0)}^{x_1(t_1)} \frac{dx_1}{f_1[x_1, \varphi(x_1)]}. \quad (6.46)$$

Как видим, для определения этого времени необходимо найти площадь, ограниченную кривой  $1/f_1$  между точками  $x_1(t_0)$  и  $x_1(t_1)$ . Для этого строят график функции  $1/f_1$ , задаваясь значениями  $x_1$ , и вычисляют равновеликую площадь, ограниченную графиком. Аналогично можно определить моменты времени  $t_2$ ,  $t_3$ , соответствующие последующим точкам траекторий.

Следует отметить, что в большинстве случаев практического применения метода траекторий нет необходимости в определении шкалы времени. Требуемые качественные заключения о характере процессов в цепи можно сделать по «фазовому портрету».

## ГЛАВА 7

### МЕТОДЫ АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

#### § 7.1. Общие замечания

В предыдущей главе был рассмотрен качественный метод анализа нелинейных автономных цепей с помощью построения траекторий в пространстве состояния. Метод применим в основном для цепей первого и второго порядков. Здесь рассмотрим методы количественного анализа нелинейных цепей, применимые как для автономных, так и для неавтономных цепей. Количественное решение возможно лишь при численном задании параметров и характеристик всех элементов, а также начальных условий, т. е. для определенных конкретных цепей.

В данной главе излагается один из графических методов — *метод изоклин*, используемый для построения графика решения или интегральной кривой уравнений первого порядка. Далее описывается *численный метод* приближенного интегрирования систем нелинейных дифференциальных уравнений состояния. Приводятся известные из математики простейшие алгоритмы численного решения систем уравнений состояния. Привлечение алгоритмов связано с объемными вычислениями из-за большого числа малых интервалов времени — шагов интегрирования. Эти вычисления выполнимы только с помощью ЦВМ. Численный метод с применением ЦВМ в принципе может служить для анализа как автономных, так и неавтономных цепей высокого порядка, имеющих единственное решение. Излагается кусочно-линейный метод анализа нелинейных динамических цепей применительно к цепи первого порядка, хотя его можно использовать также для анализа процессов в цепях второго и более высокого порядка. Как пример применения кусочно-линейного метода рассмотрены процессы в переключаемых цепях первого порядка.

При анализе кусочно-линейным методом все элементы цепи (в том числе трехполюсные) должны быть представлены схемами замещения, состоящими из двухполюсных элементов и



управляемых источников. Подобные схемы можно получить, взяв за основу резистивные схемы, пригодные для области низких частот, и добавляя к ним паразитные параметры — емкости и индуктивности. На рис. 7.1, а, б приведены кусочно-линейные схемы замещения триода и биполярного транзистора, составленные на основе их резистивных кусочно-линейных схем (см. § 1.8) с учетом паразитных емкостей. В слу-

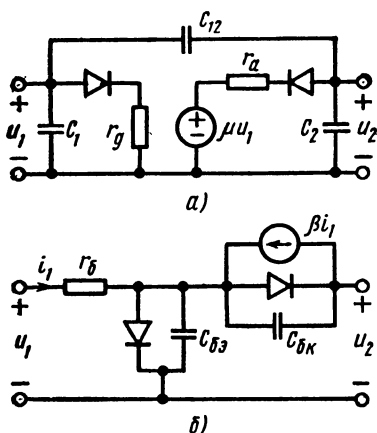


Рис. 7.1

чае триода — это емкость  $C_{12}$  сетки по отношению к катоду, емкость  $C_{12}$  промежутка сетка—анод и емкость  $C_2$  анода по отношению к заземленным частям. В случае транзистора учтены барьерные емкости  $C_{кб}$  и  $C_{ба}$  переходов коллектор — база и база—эмиттер с добавкой диффузионных емкостей переходов, обусловленных перераспределением зарядов неосновных носителей. Для очень высоких частот может оказаться необходимым учет также индуктивности выводов. Полупроводниковый диод с  $p$ - $n$ -переходом, очевидно,

будет представляться кусочно-линейной схемой, приведенной на рис. 1.32, с параллельно включенной барьерной емкостью. Последняя, как указывалось ранее, является нелинейной.

## § 7.2. Графический метод анализа цепи первого порядка

Рассмотрим нелинейную цепь, состоящую из элемента, запаасающего энергию, и резистивной подцепи, подключенную к источнику переменного сигнала. Уравнение состояния цепи будет дифференциальным уравнением первого порядка

$$dx/dt = f(x, t). \quad (7.1)$$

Правая часть уравнения содержит как искомую переменную, так и время, которое появляется вследствие приложения к цепи изменяющегося во времени сигнала. Уравнение (7.1) описывает процесс в неавтономной цепи первого порядка. В частном случае, когда нет внешнего воздействия переменного сигнала, время в правую часть не войдет и цепь будет автономной.

Искомое решение  $x = x(t)$  уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию  $x(t_0) = X_0$ , можно получить графически на основе построения поля направлений с помощью метода изоклин, который применялся в § 6.6 для получения траекторий на фазовой плоскости. При построении решений  $x(t)$  на плоскости  $t - x$  изоклина представляет линию, на которой производная, т. е. угловой коэффициент касательной в точке  $(x, t)$  кривой  $f(x, t)$ , постоянна:

$$dx/dt = f(x, t) = k_i. \quad (7.2)$$

Задавая различные значения  $k_i$ , получим семейство изоклин.

Суть метода состоит в нанесении в пределах интересующей области на линиях — изоклинах (7.2) линейных элементов — коротких отрезков прямых под постоянным углом  $\arctg k_i$  на небольших расстояниях друг от друга. График решения (интегральная кривая) получится, если из заданной начальной точки  $(t_0, X_0)$  провести кривую так, чтобы касательная к ней в каждой точке совпала с направлением линейного элемента.

Если поле направлений нанесено для достаточно большой области, то можно построить семейство графиков решений, соответствующих различным начальным условиям. Одно из главных достоинств рассматриваемого графического метода состоит именно в том, что он позволяет исследовать влияние начальных условий на переходные процессы в цепи. При этом сложность характеристики нелинейных элементов мало влияет на ход расчета. Кроме того, метод позволяет производить анализ как автономных, так и неавтономных цепей. Для анализа влияния переключений и изменения параметров цепи метод неудобен, так как требует построения каждый раз нового поля направлений.

Как указывалось, уравнение состояния вида (7.1) в аналитической форме обычно может быть получено только в результате аппроксимации нелинейной характеристики, что всегда вносит погрешность. Погрешность аппроксимации тем больше, чем проще вид аппроксимирующей аналитической функции.

Так как метод построения интегральных кривых с помощью построения поля направлений является графическим, целесообразно оперировать характеристиками, заданными не в приближенном аналитическом, а в первоначальном графическом виде.

Покажем возможность построения линии постоянного наклона по характеристикам, заданным графически. Из (7.2) можно заключить, что при *постоянстве производной для точек линии — изоклины с угловым коэффициентом  $k_i$  — дифферен-*

циальное уравнение переходит в функциональное, содержащее время. Таким уравнением описывается резистивная цепь. Как видим, для точек линии постоянного наклона исходная цепь может быть заменена эквивалентной резистивной цепью. Резистивную схему замещения можно получить, если в исходной цепи заменить индуктивность или емкость резистивным элементом с нелинейной характеристикой, зависящей как от характеристики  $\Psi(i)$  или  $q(u)$ , так и от углового коэффициента  $k_i$ . После составления резистивной схемы для построения линий постоянного наклона можно применить графические методы, рассмотренные в гл. 2.

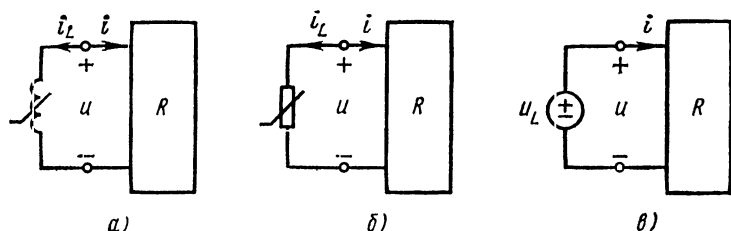


Рис. 7.2

В случае цепи первого порядка с нелинейной индуктивностью (рис. 7.2, а), имеющей однозначную характеристику  $\Psi(i)$ , для точек изоклины с угловым коэффициентом  $k_i$  получим

$$u_L = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d\Psi}{di_L} \frac{di_L}{dt} = k_i L(i_L) = u(i_L, t), \quad (7.3)$$

где  $L(i_L) = d\Psi(i_L)/di_L$  — динамическая индуктивность.

Правая часть уравнения  $u(i_L, t)$ , зависящая от времени, представляет вольт-амперную характеристику резистивной подцепи с источниками. Левую часть уравнения (7.3)

$$u_L = k_i L(i_L) \quad (7.4)$$

можно рассматривать как вольт-амперную характеристику резистивного элемента  $R(k_i)$  (рис. 7.2, б), которым заменяется индуктивность для точек изоклины с угловым коэффициентом  $k_i$ . Эта вольт-амперная характеристика согласно (7.3) пропорциональна динамической индуктивности. Задача нахождения линии постоянного наклона с угловым коэффициентом  $k_i$  сводится к определению кривой тока  $i_L(i, k_i)$  в сопротивлении  $R(k_i)$ . Так как характеристики всех резистивных элементов, входящих в эквивалентную цепь изоклины, известны, кривую тока можно найти графически (см. § 2.3).

В случае линейной индуктивности  $L$  напряжение на ней согласно (7.3) будет постоянным:

$$u_L = k_i L. \quad (7.5)$$

Следовательно, линейную индуктивность можно представить источником напряжения с напряжением, пропорциональным угловому коэффициенту (рис. 7.2, в). Линии постоянного наклона при этом будут определяться током источника.

Результаты, полученные для индуктивного элемента, на дуальной основе переносятся на цепь первого порядка с емкостным элементом (рис. 7.3, а). Если характеристика емкост-

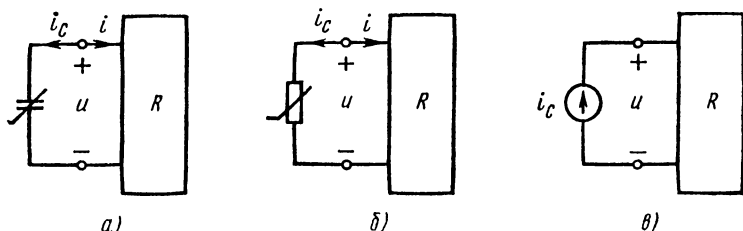


Рис. 7.3

ного элемента выражается однозначной зависимостью  $q(u)$ , то для точек изоклины с угловым коэффициентом  $k_i$  получим

$$i_C = \frac{dq}{di} \quad \frac{dq}{du_C} \frac{du_C}{dt} = k_i C(u_C) = i(u_C, t), \quad (7.6)$$

где  $C(u_C) = dq(u_C)/du_C$  — динамическая емкость.

Правая часть уравнения  $i(u_C, t)$  является вольт-амперной характеристикой резистивной подцепи, включающей источники. Левую часть уравнения (7.6)

$$i_C = k_i C(u_C) \quad (7.7)$$

можно рассматривать как вольт-амперную характеристику резистивного элемента  $G(k_i)$  (рис. 7.3, б), которым заменяется емкость для точек изоклины с угловым коэффициентом  $k_i$ . Для определения линии постоянного наклона с угловым коэффициентом  $k_i$  следует найти кривую напряжения  $u_C(t, k_i)$  в проводимости  $G(k_i)$  графическим методом.

В случае линейной емкости  $C$  ток в ней согласно (7.6) будет постоянным:

$$i_C = k_i C. \quad (7.8)$$

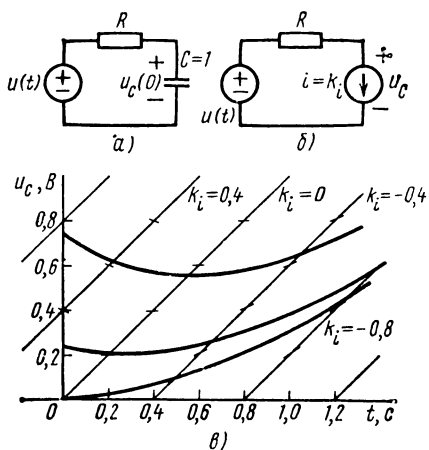


Рис. 7.4

$C = 1$  источником тока с током  $k_i C = k_i$  (рис. 7.4, б), для напряжения на емкости или уравнения изоклины имеем

$$u_C = -k_i + t.$$

Изоклины, представляющие прямые линии, построены на рис. 7.4, в для ряда значений  $k_i$ . Там же приведены графики решения  $u_C(t)$  для различных начальных условий  $u_C(0)$ .

### § 7.3. Кусочно-линейный метод анализа нелинейных динамических цепей

Кусочно-линейный метод является одним из простейших методов количественного анализа нелинейных динамических цепей. Особенно простыми получаются расчеты цепей первого и второго порядков. Для применения метода характеристики всех нелинейных емкостей, индуктивностей и резистивных элементов представляются кусочно-линейными приближениями в пределах ожидаемых максимальных и минимальных значений переменных. Число линейных участков приближения желательно иметь по возможности минимальным — с увеличением общего числа линейных участков всех элементов, зависящего от сложности и вида характеристик, объем расчетов существенно возрастает. Трехполюсные элементы — транзисторы и триоды — представляются кусочно-линейными схемами замещения из двухполюсных элементов и управляемых источников (см. рис. 7.1).

Линейную емкость, как видим, можно представить источником тока, ток которого пропорционален  $k_i$  (рис. 7.3, б). Изоклина при этом будет определяться напряжением источника.

Рассмотрим простейший пример построения изоклин на основе приведенных схем замещения.

Возьмем линейную цепь из последовательно соединенных  $RC$ -элементов, подключенную к источнику линейно нарастающего напряжения  $u(t)$  (рис. 7.4, а). За-

В пределах каждого из линейных участков элементы цепи могут быть изображены линейными схемами замещения с постоянными параметрами, так что расчет должен производиться простыми методами анализа линейных цепей. При этом начальные условия — напряжения на емкостях и токи в индуктивностях — определяют положение рабочей точки на исходном начальном участке. Структура цепи для всех линейных участков остается неизменной — изменяться будут лишь параметры элементов. При переходе к следующему линейному участку с другим наклоном необходимо в месте излома или сопряжения отрезков найти напряжения на емкостях и токи в индуктивностях, которые по условиям непрерывности зарядов в емкостях и потокоцеплений в индуктивностях принимаются в качестве начальных условий.

Рассмотрим расчет автономных цепей первого порядка. Цепь первого порядка содержит только один элемент, запасающий энергию, — индуктивность или емкость, и один или несколько резистивных элементов. Автономные цепи могут содержать также источники постоянного напряжения или тока. Хотя любой из элементов цепи может быть нелинейным, для простоты возьмем случай, когда индуктивность или емкость являются линейными, т. е. постоянными, а резистивные элементы — нелинейными, зависящими от напряжения или тока.

На рис. 7.2, а и 7.3, а изображены автономные цепи первого порядка. Предполагается, что независимые источники постоянного напряжения или тока включены в резистивную подцепь, показанную в виде прямоугольника. Уравнения состояния цепи первого порядка с линейными емкостью и индуктивностью запишутся как

$$\begin{aligned}\frac{du_C}{dt} &= -\frac{1}{C} i(u); \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{L} u(i),\end{aligned}$$

где  $i(u)$ ,  $u(i)$  — входные характеристики резистивной подцепи со стороны выводов емкости и индуктивности соответственно.

При изменении тока и напряжения в больших пределах рабочая точка будет перемещаться по участкам кусочно-линейной характеристики от некоторого начального участка до конечного. Исходное положение рабочей точки и, следовательно, начальный участок однозначно определяются начальным током в индуктивности  $I_0$  или начальным напряжением на емкости  $U_0$ .

Конечное положение рабочей точки и, следовательно, последний участок кусочно-линейной характеристики будут определяться точкой равновесия, которая, как было показано в гл. 5, соответствует равенству нулю производных уравнений состояния.

В случае цепи с индуктивностью соотношение  $Li' = 0$  означает равенство нулю напряжения, т. е. короткое замыкание входа резистивной подцепи, так что точкой равновесия является точка пересечения характеристикой  $i(u)$  оси  $i$ . В случае

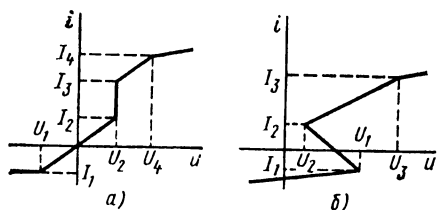


Рис. 7.5

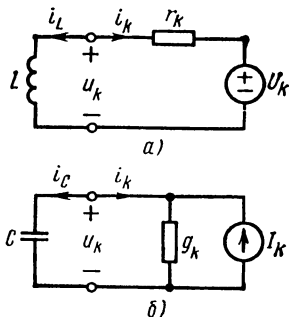


Рис. 7.6

цепи с емкостью соотношение  $Cu' = 0$  означает равенство нулю тока, т. е. разрыв входа резистивной подцепи, так что точкой равновесия является точка пересечения характеристикой  $u(i)$  оси  $u$ .

После определения начального и конечного (точка равновесия) положений рабочей точки необходимо указать стрелками направления ее перемещения вдоль участков характеристики на плоскости  $u - i$ . При нумерации линейных участков, проходимых рабочей точкой от начального до конечного положения, следует учесть физические условия в цепи с индуктивностью или емкостью.

Входную характеристику резистивной подцепи по отношению к выводам со стороны емкости или индуктивности можно получить, применяя методы, изложенные в гл. 2.

Будем предполагать, что произведено кусочно-линейное приближение вольт-амперной характеристики резистивной подцепи. На рис. 7.5, а, б изображены несколько участков указанного кусочно-линейного приближения. Каждый из них определяется угловым коэффициентом наклона  $k = g_k = i/r_k$  и точками пересечения  $I_k$  или  $U_k$  осей ординат и абсцисс. Как было показано в § 2.4, такой участок может быть представлен одной

из двух схем замещения: 1) последовательной схемой из источника постоянного напряжения  $U_k$  и линейного сопротивления  $r_k$  (см. рис. 2.9, б); 2) параллельной схемой из источника постоянного тока  $I_k$  и проводимости  $g_k$  (см. рис. 2.9, а).

Для участков с отрицательным наклоном проводимости и сопротивления в схемах будут отрицательными; для участков, расположенных горизонтально или вертикально, схема будет состоять только из источника постоянного тока с током  $I_k$  или источника постоянного напряжения с напряжением  $U_k$ .

Представив нелинейную резистивную подцепь со стороны выводов индуктивности или емкости одной из перечисленных кусочно-линейных схем замещения, получим линеаризованную цепь первого порядка, пригодную для любого линейного участка при соответствующем изменении параметров схемы (рис. 7.6, а, б).

Для ясности последующего изложения повторим вкратце некоторые общие качественные соображения, которые были приведены в § 6.3.

Рассмотрим сначала цепь с индуктивностью. Для принятых на рис. 7.2, а положительных направлений величин напряжение на входе резистивной подцепи и ток индуктивного элемента связаны соотношением

$$u = -L \frac{di}{dt}.$$

*Если рабочая точка лежит на участке характеристики, расположенном в правой полуплоскости ( $u > 0$ ), то производная от тока отрицательна и ток уменьшается — точка должна перемещаться в сторону уменьшения тока (сверху вниз), если же рабочая точка лежит в левой полуплоскости ( $u < 0$ ), то производная от тока положительна и точка должна перемещаться в сторону увеличения тока (снизу вверх).*

На основании изложенного можно однозначно перечислить порядок и направление обхода отдельных линейных участков характеристики рабочей точкой при ее перемещении от начального до конечного положения (точки равновесия) на оси  $i$ . Указанное перечисление нетрудно сделать для монотонной характеристики, а для немонотонной характеристики требуется особый разбор. Для немонотонных характеристик резистивной подцепи, показанных на рис. 7.7, а при  $u > 0$  и  $u < 0$ , перемещения рабочих точек от исходных положений  $a$  и  $a_1$  до точек равновесия  $f$  и  $d_1$  получатся такими, как изображено на чертеже. Как видим, на некоторые участки с отрицательным наклоном, в которых значение тока должно нарастать при  $u > 0$  и спадать при  $u < 0$ , рабочая точка не попадает из-



за скачкообразных переходов, и они исключаются из рассмотрения. Не будут исключаться и должны рассматриваться те участки с отрицательным наклоном, перемещение по которым рабочей точки не противоречит условию уменьшения или увеличения тока (участок  $de$ ).

В цепи с емкостью ток на входе резистивной подцепы и напряжение емкостного элемента связаны соотношением

$$i = -C \frac{du}{dt}.$$

Если рабочая точка лежит на участке характеристики, расположенном в верхней полуплоскости ( $i > 0$ ), то производная от напряжения отрицательна и точка должна перемещаться в

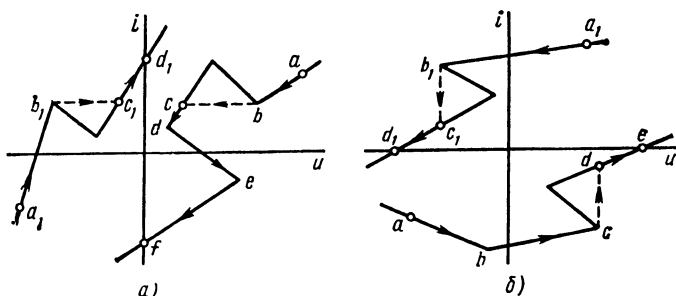


Рис. 7.7

сторону уменьшения напряжения (справа налево). Если же точка лежит в нижней полуплоскости ( $i < 0$ ), то производная положительна и рабочая точка должна перемещаться в сторону увеличения напряжения (слева направо). Сказанное позволяет указать направления перемещения рабочей точки от начального до конечного положения и перечислить порядок, в котором будет перемещаться рабочая точка по отдельным линейным участкам от исходного положения до точки равновесия на оси  $u$ . Если резистивная подцепь, присоединенная к емкости, имеет немонотонную характеристику (рис. 7.7, б), то при  $i < 0$ ;  $i > 0$  перемещения рабочих точек от начальных положений  $a$  и  $a_1$  до точек равновесия  $e$ ,  $d_1$  будут такими, как изображено на чертеже. Как видим, исключаются из рассмотрения те участки с отрицательным наклоном, перемещение по которым рабочей точки противоречит условию уменьшения или увеличения напряжения.

После выяснения общих положений перейдем к рассмотрению метода расчета. Для конкретности изложение будем вести

применительно к схеме с индуктивностью (см. рис. 7.6, а). В первую очередь по начальному току  $I_0$  в индуктивности определяем исходное положение рабочей точки и начальный линейный участок. Закон изменения тока в цепи рис. 7.6, а на любом линейном участке с начальным током  $I_{0k}$  будет определяться уравнением состояния

$$-\frac{di_k}{dt} = \frac{r_k}{L} i_k + \frac{1}{L} U_k = \frac{1}{\tau_k} i_k + \frac{1}{L} U_k, \quad (7.9)$$

где  $\tau_k = L/r_k$  — постоянная времени цепи на  $k$ -м участке.

Решением этого линейного уравнения первого порядка является экспоненциальная функция времени. Ток в анализируемой цепи, изменяющийся по экспоненте, может быть изображен графически и записан непосредственно по схеме без решения уравнения из условия, что экспонента тока должна пройти через две точки — начальную  $i_k(i_k) = I_k$  при  $t = t_k$  и установившуюся  $i_k(\infty) = i_{yk}$  при  $t = \infty$ . Начальный ток должен быть найден в результате анализа предыдущего ( $k - 1$ )-го участка, а установившийся ток соответствует режиму короткого замыкания индуктивности, при котором

$$i_{yk} = -g_k U_k. \quad (7.10)$$

Значение  $i_{yk}$  определяется точкой пересечения оси ординат продолжением линейного участка.

На рис. 7.8, а нанесены начальное и установившееся значения тока для двух случаев:  $I_k > i_{yk}$  (рис. 7.8, а) и  $I_k < i_{yk}$  (рис. 7.8, б). Оба эти значения соединены затухающей экспонентой с постоянной времени  $\tau > 0$ . График экспоненты можно с достаточной степенью точности построить, исходя из следующих известных свойств функции: подкасательная в любой ее точке равна  $\tau$ , так что угловой коэффициент наклона кривой в точке  $t_1$  равен  $I_0 \frac{1}{\tau} e^{-t_1/\tau}$ ; при  $t = \tau$ ;  $2\tau$ ;  $3\tau$  ординаты кривой равны соответственно 0,36; 0,13 и 0,05 от начального значения.

Приведенные на рис. 7.8 экспоненты получены в предположении наличия одного линейного участка, соответствующего линейной цепи.

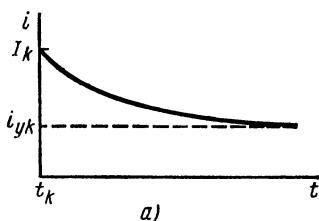
В случае нескольких участков, т. е. нелинейной цепи, каждому участку будет соответствовать конечный сегмент экспоненты, показанный на рис. 7.8, а, б сплошной линией и проходящий за конечный интервал времени

$$\Delta t = t_{k+1} - t_k,$$

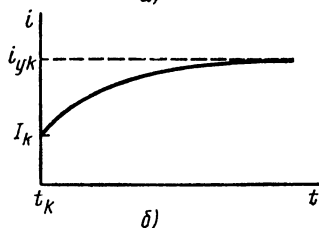
где  $t_k$  — момент попадания рабочей точки в начало  $k$ -го участка, которому соответствует на характеристике ток  $I_k$ ;  $t_{k+1}$  — момент оставления рабочей точкой  $k$ -го участка, которому соответствует на характеристике ток  $I_{k+1}$ .

Аналитически графики участков экспонент, приведенных на рис. 7.9 и представляющих ток в индуктивности на  $k$ -м участке, можно записать в виде выражения

$$i = i_{yk} + (I_k - i_{yk}) e^{-(t - t_k)/\tau_k} \quad (t_k \leq t \leq t_{k+1}). \quad (7.11)$$

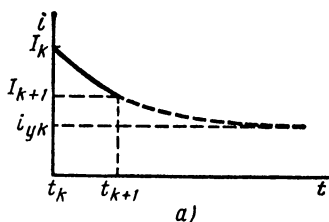


а)

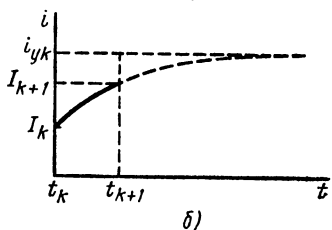


б)

Рис. 7.8



а)



б)

Рис. 7.9

При  $t = t_k$   $i(t_k) = I_k$ , а при

$$t = t_{k+1} \quad i(t_{k+1}) = I_{k+1} \quad \text{и} \quad I_{k+1} - i_{yk} = \\ = (I_k - i_{yk}) e^{-(t_{k+1} - t_k)/\tau_k}.$$

Отсюда значение времени в конце  $k$ -го участка

$$t_{k+1} = t_k + \tau_k \ln \frac{I_k - i_{yk}}{I_{k+1} - i_{yk}}. \quad (7.12)$$

Расчет нужно начинать с исходного (первого) участка, определяемого начальным током  $i(0) = I_0$ . Из кусочно-линейной характеристики находим  $I_1$ ,  $U_1$  и  $r_1$  и согласно (7.9), (7.10) определяем  $i_{y1}$ . Полагая в (7.12)  $t_k = 0$ ,  $I_k = I_0$  и  $I_{k+1} = I_1$ , находим время, соответствующее концу первого участка. По полученным данным легко построить экспоненту и выделить дугу, соответствующую первому участку. Затем переходим к следующему линейному участку, для которого расчеты и по-

строения будут аналогичными. Расчет заканчивается участком, на котором располагается точка равновесия.

Следует остановиться на особых частных случаях. Для участка с отрицательным наклоном проводимость и, следовательно, постоянная времени отрицательны. Экспонента в (7.11), имеющая положительный показатель, будет неограниченно нарастать с увеличением времени и спадать с его уменьшением, так что в момент  $t = t_{0k} - |\tau_k|$  значение экспоненты составит 0,36 от значения при  $t = t_{0k}$ . При  $t \rightarrow -\infty$  свободная экспоненциальная составляющая спадает до нуля и будет достигнута установившаяся составляющая  $i_{y k}$ .

Выражение (7.12) для момента времени, соответствующего концу  $k$ -го участка, получит вид

$$t_{k+1} = t_k + |\tau_k| \ln \frac{I_{k+1} - i_{y k}}{I_k - i_{y k}}. \quad (7.13)$$

Если рабочая точка проходит горизонтальный участок характеристики, то схема будет состоять из источника постоянного тока  $I_k$ , подключенного к индуктивности. Ток в индуктивности останется неизменным и равным  $I_k$ , а напряжение на ней будет равно нулю.

При вертикальном расположении участка схема его замещения состоит из источника напряжения, подключенного к индуктивности, так что напряжение на индуктивности постоянно и равно  $U_k$ , а ток линейно нарастает по закону

$$i = i(t_k) + \frac{U_k}{L} \int_{t_k}^t dt = i(t_k) + \frac{U_k}{L} (t - t_k). \quad (7.14)$$

В случае емкостного элемента, если для резистивной подцепи принять параллельную схему, ход расчетов аналогичен приведенному, лишь все соотношения будут дуальными. В частности, установившееся значение напряжения, равное абсциссе точки пересечения оси  $u$  линией  $k$ -го участка, и постоянная времени выражаются соотношениями

$$u_{y k} = -r_k I_k; \quad \tau_k = C/g_k. \quad (7.15)$$

Аналитическое выражение закона изменения напряжения на емкости в  $k$ -м участке имеет вид

$$u = u_{y k} + (U_k - u_{y k}) e^{-(t-t_k)/\tau_k} \quad (t_k \leq t \leq t_{k+1}). \quad (7.16)$$

Если ток в индуктивности или напряжение на емкости найдены для всех линейных участков, то по ним можно определить напряжения и токи всех ветвей. При этом все переменные цепи

имеют одинаковые точки перехода от одного выражения к другому на границах линейных участков.

Изложенный кусочно-линейный метод расчета цепей первого порядка получается очень простым, так что все вычисления могут быть проведены в табличной форме.

Рассмотрим примеры расчета нелинейных цепей первого порядка кусочно-линейным методом.

1. Подключение линейной индуктивности  $L = 1$  к источнику постоянного напряжения  $E = 3$  В через нелинейное сопротивление (рис. 7.10, а). Кусочно-линейная характеристика сопротивления  $i(u_R)$ ,

состоящая из двух линейных участков, показана на рис. 7.10, б. Первый участок проходит через начало координат.

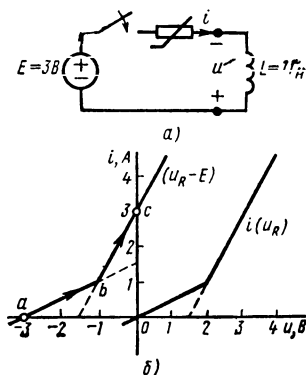


Рис. 7.10

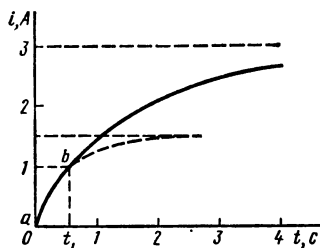


Рис. 7.11

Результирующая входная характеристика резистивной подцепи со стороны выводов индуктивности, изображающая уравнение равновесия напряжений:  $u = u_R(i) - E$ , получается смещением характеристики сопротивления на величину  $E = 3$  В влево. Начало и конец первого участка этой характеристики имеют координаты  $(-3; 0)$  и  $(-1; 1)$ . Начало второго участка и точка пересечения им оси токов, представляющая точку равновесия цепи, имеют координаты  $(-1; 1)$  и  $(0; 3)$ . Продолжение второго участка пересекает ось абсцисс в точке  $U_2 = -1,5$  В.

Для первого и второго участков имеем

$$r_1 = (-1 + 3)/(1 - 0) = 2 \text{ Ом}; \dot{U}_1 = -3,0 \text{ В}; I_1 = 1,5 \text{ А};$$

$$r_2 = (0 + 1)/(3 - 1) = 0,5 \text{ Ом}; U_2 = -1,5 \text{ В}; I_2 = 3,0 \text{ А},$$

где  $U_h, I_h$  — точки пересечения линиями участков осей напряжения и тока.

Если принять начальный ток в индуктивности равным нулю, то исходное положение рабочей точки окажется на первом участке в точке а (рис. 7.10, а). Путь перемещения рабочей точки до точки равновесия с показан стрелками. Согласно (7.11) ток на первом участке  $ab$  нарастает по закону

$$i = i_{y1} + (I_{01} - i_{y1}) e^{-i/i_{y1}} = 1,5 (1 - e^{-2i}) \quad (0 < i < 1; 0 < t < t_1),$$

где  $i_{y1} = I_1 = 1,5$  А — значение тока, которое установилось бы при  $t \rightarrow \infty$ , если бы рабочая точка перемещалась только по первому участку;  $\tau_1 = L/r_1 = 0,5$  с — постоянная времени цепи.

Время, в течение которого достигается значение  $i = 1$  А, соответствующее концу первого участка, согласно (7.12)

$$t_1 = \tau_1 \ln \frac{I_{01} - i_{y1}}{I_{02} - i_{y1}} = 0,5 \ln \frac{0 - 1,5}{1 - 1,5} = 0,55 \text{ с.}$$

При  $t > t_1 = 0,5$  с рабочая точка перемещается по второму участку  $bc$ . Ток здесь, начальное значение которого  $I_{02} = 1$  А, будет нарастать согласно (7.11) по закону

$$i = i_{y2} + (I_{02} - i_{y2}) e^{-(t-t_1)/\tau_2} = 3 - 2 e^{-(t-t_1)/2} \quad (1 < i < 3),$$

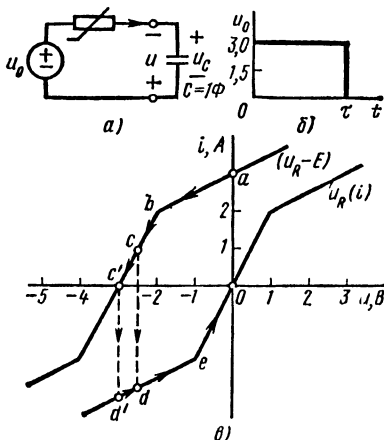


Рис. 7.12

где  $i_{y2} = I_2 = 3$  А — установившееся значение тока в точке равновесия;  $\tau_2 = L/r_2 = 2$  с — постоянная времени цепи.

На рис. 7.11 приведена кривая нарастания тока в цепи, составленная из дуг двух найденных экспонент, которые сопрягаются в точке  $t = t_1 = 0,55$  с;  $i = 1$  А.

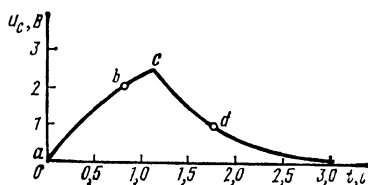


Рис. 7.13

2. Подключение линейной емкости (рис. 7.12, а) к источнику импульсного напряжения прямоугольной формы (рис. 7.12, б) длительностью  $\tau$  и амплитудой  $E = 3$  В через нелинейное сопротивление. Кусочно-линейная характеристика сопротивления, состоящая из трех линейных участков с симметрией относительно начала координат, приведена на рис. 7.12, в (кривая  $u_R(i)$ ). Эта же кривая является входной характеристикой резистивной подцепи при нулевом напряжении источника ( $t > \tau$ ). Сопротивления крайних и среднего участков:

$$r_1 = r_3 = 2 \text{ Ом}; r_2 = 0,5 \text{ Ом.}$$

Входную характеристику резистивной подцепи со стороны выводов емкости в интервале  $0 < t < \tau$  приложения импульса напряжения постоянной амплитуды получим, сместив кривую  $u_R$  вправо на величину  $-E = -3$  В.

Наметим путь перемещения рабочей точки по характеристикам. Исходное положение точки зависит от начального напряжения на емкости. Приняв  $u_C(0) = 0$ , получим исходную точку  $a$  (рис. 7.12, в) на характеристике  $u_R = -E$ . Дальнейший путь в интервале  $0 < t < \tau$ , намеченный в соответствии со сказанным ранее, показан стрелками.

При  $t = \tau$  спад напряжения источника переведет рабочую точку скачком из точки  $c$  по вертикальной линии (при постоянстве напряжения на емкости) в точку  $d$  характеристики  $u_R(i)$ . Перемещаясь по этой характеристике, рабочая точка при  $t \rightarrow \infty$  достигнет положения равновесия в начале координат. Место скачкообразного перехода на характеристику  $u_R(i)$  зависит от длительности импульса. При большой длительности переход произойдет вблизи точки равновесия  $c'$  (установившийся режим).

Теперь аналогично предыдущему нетрудно записать выражения или построить графики экспонент для каждого из линейных участков, проходимых рабочей точкой, по известным значениям постоянной времени, начального и конечного напряжений участка и установившегося напряжения, равного абсциссе точки пересечения продолжения участка с осью  $u$ .

Для участка  $ab$  имеем:  $\tau_1 = r_3 C = 2$  с;  $U_{01} = U_a = 0$ ;  $U_b = -2$  В;  $u_{y1} = -6$  В. Время прохождения участка рабочей точкой согласно (7.12) равно  $t_b = 0,81$  с. Соответствующая дуга экспоненты вместе с экспонентами других участков изображена на рис. 7.13.

Для участка  $bc$  имеем:  $\tau_2 = r_2 C = 0,5$  с;  $U_{02} = U_b = -2$  В;  $U_c = -2,5$  В;  $u_{y2} = -3$  В.

Время прохождения участка рабочей точкой согласно (7.12) равно  $t_c - t_b = 0,35$  с. Отсюда длительность прямоугольного импульса, при которой происходит переход на нижнюю характеристику,

$$\tau = t_c = 1,16 \text{ с.}$$

Для участка  $de$  имеем:  $\tau = 2$  с;  $U_{03} = U_d = -2,5$  В;  $U_e = -1$  В;  $u_{y3} = 3$  В. Время прохождения рабочей точкой согласно (7.12) равно  $t_e - t_d = 0,64$  с. Для последнего участка  $Oe$   $\tau_3 = 0,5$  с; начальное напряжение  $U_{04} = U_e = -1$  В и конечное (установившееся) напряжение  $u_{y4} = 0$ . Кривая (рис. 7.13) изменения напряжения на емкости обратная по знаку входному напряжению, состоит из дуг четырех экспонент.

Из хода подробного решения приведенных примеров видно, что основными этапами являются: построение кусочно-линейной входной характеристики резистивной подцепи и установление пути движения рабочей точки от начального до установившегося положения. Дуги экспонент, из которых составляется кривая изменения переменных цепи во времени, могут быть нанесены сразу по известным из графика для каждого линейного участка начальным и установившимся значениям переменной и постоянной времени. При необходимости дуги экспонент могут быть записаны в аналитической форме.

## § 7.4. Расчет переключаемых цепей первого порядка

В качестве примера приложения кусочно-линейного метода анализа цепей первого порядка рассмотрим расчет переключаемых цепей.

Переключаемыми будем называть цепи, которые содержат в качестве элементов устройства типа идеального

ключа, включаемые и отключаемые в заданные моменты времени. При этом сопротивление ключа в отключенном положении бесконечно велико, а при включении мгновенно становится равным нулю. Реальными ключевыми устройствами являются различные реле, как электромагнитные, так и электронные.

Для того чтобы сохранить автономный характер цепи, будем полагать, что цепь присоединена к источнику постоянного напряжения. С помощью идеальных ключей и источника постоянного напряжения можно получать импульсы (или серию импульсов) прямоугольной формы, так что цепи с такими импульсными воздействиями также относятся к переключаемым.

Рассматриваемая цепь первого порядка содержит один индуктивный или емкостный элемент. Остальные ветви цепи являются резистивными. Очень часто ключ замыкает и размыкает какую-либо ветвь или участок из комбинации нескольких ветвей. При этом происходит изменение структуры цепи. Обычно замыкается и размыкается резистивная ветвь или участок из резистивных ветвей и происходит изменение структуры резистивной подцепи.

Изменение структуры цепи с помощью ключей приводит к мгновенному изменению входной характеристики резистивной подцепи со стороны выводов индуктивности или емкости. Если рабочая точка, определяющая режим, до переключения находилась на соответствующей характеристике в состоянии равновесия (момент  $i_n -$ ), то после переключения при  $t = t_n$  она должна скачком перейти на новую характеристику (момент  $t_n +$ ). Так как новое положение точки не совпадает с состоянием равновесия, рабочая точка будет перемещаться согласно установленным в предыдущем параграфе условиям — ток и напряжение начнут изменяться во времени. В цепях с переключениями всегда имеют место скачкообразные переходы независимо от наличия участков характеристики с отрицательным наклоном.

Возьмем простейший пример линейной переключаемой цепи первого порядка с индуктивностью (рис. 7.14, а). Резистивная подцепь представляет делитель напряжения, подключенный к источнику постоянного напряжения  $U = 10$  В. Первое плечо делителя состоит из последовательно включенных сопротивлений  $R_1 = 1$  Ом,  $R_2 = 1$  Ом. Сопротивление  $R_2$  шунтировано ключом К. Второе плечо делителя, к которому подключена индуктивность, имеет сопротивление  $R_3 = 8$  Ом. Положим, что при  $t < 0$  ключ отключен. Представим резистивную подцепь со стороны выводов индуктивности эквивалентным источником напряжения (рис. 7.14, б). Напряжение этого источника равно напряжению на выводах разомкнутой индуктивности, которое составляет

$$U_0 = U_{xx} = R_3 U / (R_1 + R_2 + R_3) = 8 \text{ В.}$$



Внутреннее сопротивление эквивалентного источника, равное сопротивлению со стороны выводов индуктивности при короткозамкнутом источнике напряжения,

$$R_0 = (R_1 + R_2) R_3 / (R_1 + R_2 + R_3) = 1,6 \text{ Ом.}$$

Вольт-амперная характеристика резистивной подцепи определяется выражениями

$$u = 1,6i + 8 \text{ В; } i = u/1,6 - 5 \text{ А.}$$

Прямая  $a$ , изображающая эту характеристику (рис. 7.15,  $a$ ), пересекает ось  $i$  в точке  $(0; -5)$ , которая является точкой равновесия цепи при отключенном ключе.

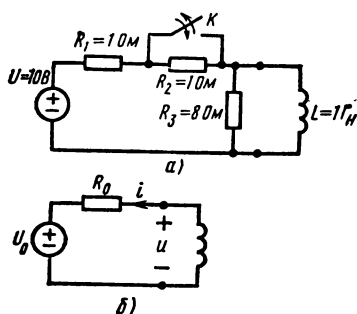


Рис. 7.14

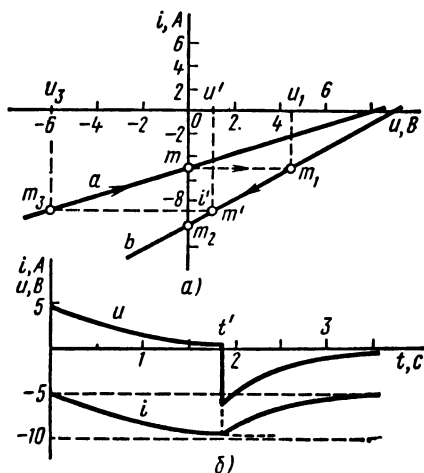


Рис. 7.15

При включении ключа в момент времени  $t = 0$  сопротивление  $R_2 = 0$  и параметры эквивалентного источника напряжения равны:

$$U_0 = (10 \cdot 8) / 9 = 80/9 \text{ В; } R_0 = (1 \cdot 8) / 9 = 8/9 \text{ Ом.}$$

Соответствующая вольт-амперная характеристика резистивной подцепи выражается соотношениями

$$u = \frac{8}{9} i + \frac{80}{9} \text{ В; } i = \frac{9}{8} u - 10 \text{ А.}$$

Эта характеристика представлена на рис. 7.15 прямой  $b$ , пересекающей ось  $i$  в точке  $(0; -10)$ , которая является точкой равновесия цепи при включенном ключе.

При замыкании ключа в момент времени  $t = 0$  рабочая точка из состояния равновесия с координатами  $(0, -5)$  скачком по горизонтальной линии перейдет на характеристику  $b$  в точку  $m_1$  в силу непрерывности тока в индуктивности. При этом напряжение на индуктивности получит скачок от 0 до  $u_1$ . Так как  $u_1 > 0$ , то рабочая точка затем будет перемещаться по прямой в сторону уменьшения тока до точки равновесия  $m_2$ , где установившееся значение тока  $i_{\text{уст}} = -10 \text{ А}$  и напряжение  $u = 0$ . Спад тока от  $i_0 = -5 \text{ А}$  до  $i_{\text{уст}} = -10 \text{ А}$  согласно (7.11) будет

происходить по закону

$$i = i_y + (I_0 - i_y) e^{-t/\tau_b} = -10 + 5e^{-t/\tau_b},$$

где  $\tau_b = L/R_0 = 9/8$  с — постоянная времени для характеристики  $b$ .  
Напряжение на входе резистивной подцепы спадает также по экспоненте от  $u_1 = 4,5$  В до 0:

$$u(t) = 4,5 e^{-t/\tau_b}.$$

Новая точка равновесия (0, —10) будет достигнута при  $t = \infty$ , практически при  $t = (3 \div 5) \tau_b$ .

В момент времени  $t = t'$  (точка  $m'$ ) значения тока и напряжения

$$i' = -10 + 5e^{-t'/\tau_b}; \quad u' = 4,5 e^{-t'/\tau_b}.$$

При  $t' = 1,81$  с  $i' = -9$  А;  $u' = 0,9$  В.

Если при  $t = t'$  разомкнуть ключ, то рабочая точка скачком по горизонтальной линии перейдет на характеристику в точку  $m_3$ , в которой ток  $i_3 = i' = -9$  А, а напряжение отрицательно  $u_3 = -6$  В. Из положения  $m_3$  рабочая точка будет перемещаться по прямой  $u$  в сторону увеличения тока до точки равновесия (0, —5). При  $t > t'$  для тока и напряжения можно записать

$$i = -5 - 4e^{-(t-t')/\tau_a}; \quad u = -6e^{-(t-t')/\tau_a},$$

где  $\tau_a = L/R_0 = 1/1,6$  с — постоянная времени для характеристики  $a$ .

Если в момент времени  $t \approx t_m$  снова замкнуть ключ, то рабочая точка перейдет опять на характеристику  $b$  и процесс получится аналогичным разобранному. При повторном замыкании и размыкании ключа через определенные равные интервалы времени сразу после первой полуволны установится режим периодических колебаний. На рис. 7.15, б приведены изменения тока и напряжения на индуктивности.

В случае нелинейной переключаемой цепи, имеющей кусочно-линейное представление характеристик, отличие от линейной цепи состоит в том, что перемещение рабочей точки в интервале между двумя переключениями происходит не по одной, а по нескольким прямым. В результате вместо дуги одной экспоненты кривая процесса состоит из сочленения дуг нескольких экспонент с различными постоянными времени. Если время переключений задано и намечен путь перемещения рабочей точки по отрезкам прямых участков как кусочно-линейных характеристик, так и скачкообразных переходов, то на основании кусочно-линейного метода нетрудно записать выражения отдельных экспонент, определяющих напряжения и токи индуктивности или емкостного элемента.

## § 7.5. О численных методах решения уравнений состояния

Численные методы анализа нелинейных цепей основаны на методах приближенного интегрирования систем нелинейных дифференциальных уравнений. Приближенное интегриро-

вание производят путем разбиения промежутка времени, в пределах которого требуется получить решение, на малые интервалы времени  $h = \Delta t$ , называемые шагом интегрирования.

Вычисления должны дать последовательно значения решения в равномерно распределенных дискретных точках, начиная от начальной точки  $t_0$  до конечной  $t_m$ :  $t_k = t_0 + kh$ .

Обозначим через  $x(t_k)$  точное значение решения в момент  $t_k$ , которое можно получить, если имеется точная формула и вычисления произведены с неограниченным количеством значащих цифр. Но точных выражений решения обычно не бывает и расчеты проводятся по приближенным численным методам. Кроме того, вычисления на ЦВМ производятся с конечным числом разрядов. Вычисления решения в момент  $t_k$ , следовательно, всегда дают не точное, а приближенное значение, которое обозначим через  $x_k$ .

Разность между точным и приближенным вычисленным значением представляет ошибку или погрешность расчета численным методом в момент  $t_k$

$$\varepsilon_k = x(t_k) - x_k = \varepsilon'_k + \varepsilon''_k. \quad (7.17)$$

Полная ошибка составляется из: 1) ошибки  $\varepsilon'_k$  неточности самого алгоритма, называемой методической, или ошибкой ограничения (отсечения) — большое число алгоритмов получается в результате учета ограниченного числа членов бесконечных рядов, так что отсеченные члены и дают методическую погрешность; 2) ошибки  $\varepsilon''_k$  округления, вызываемой ограниченным количеством разрядов или конечной длиной машинного слова ЦВМ и называемой иногда машинной, так как зависит от типа применяемой ЦВМ.

Для сравнения точности алгоритмов вводят понятие локальной ошибки (методической и округления) — погрешности в пределах одного шага, обычно первого, так как здесь в начале шага ошибка равна нулю. Обе ошибки в процессе вычисления от шага к шагу изменяются — имеют тенденцию нарастать. Исключительно важное значение в численном анализе имеет *характер накопления* или *распространения* ошибки с увеличением числа шагов.

Быстрота накопления ошибки округления существенным образом зависит от вида алгоритма и значение ошибки в некоторый момент нельзя получать простым суммированием локальных ошибок на каждом шаге. В процессе вычислений может происходить как уменьшение, так и увеличение ошибки. Если ошибка округления с ростом числа шагов уменьшается, то алгоритм называется численно устойчивым, а

когда ошибка округления нарастает, алгоритм называют численно неустойчивым; очевидно, такой алгоритм непригоден для практического применения.

Будем полагать, что для подлежащей анализу системы уравнений состояния цепи при заданных начальных значениях переменных

$$\dot{x} = f(x, t); \quad x(t_0) = x_0 \quad (7.18)$$

решение существует, притом единственное на всем интересующем интервале времени. При отсутствии существования или единственности решения численные методы будут давать результаты, не имеющие реального смысла. Следует отметить, что в общем случае установление существования и единственности решения является трудным делом. Поэтому в тех случаях, когда в процессе расчетов получаются физически неинтерпретируемые результаты, следует переходить к более обоснованным и точным моделям элементов цепи и попытаться проверить выполнение условий существования и единственности решения.

Для простоты изложения принято рассматривать численные методы применительно к одному уравнению первого порядка

$$\dot{x} = f(x, t); \quad x(t_0) = x_0. \quad (7.19)$$

Полученные результаты легко обобщаются на случай (7.18) системы уравнений.

## § 7.6. Алгоритмы решения уравнений состояния

В вычислительной математике имеется большое число методов численного решения задачи Коши интегрирования систем дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях, обладающих различными свойствами, точностью и объемом требуемых вычислений. В нашу задачу не входит детальный разбор этих методов. Ограничимся кратким изложением наиболее простых методов, которые можно разбить на два типа: 1) одношаговые — вычисление значения решения в момент  $t_{k+1} = (k+1)h$  производится на основе значения на предыдущем шаге в момент  $t_k = kh$ ; 2) многошаговые методы, в которых вычисление значения решения на очередном шаге производится по значениям, найденным на нескольких ранее пройденных шагах.

**Одношаговые методы.** К одношаговым относятся широко применяемые на практике методы Рунге—Кутта, простейшим из которых является известный элементарный алгоритм Эйле-

ра. Одношаговые методы базируются на разложении искомого решения в окрестности точки  $t_h$  в ряд Тейлора

$$x(t_h + h) = x(t_h) + \frac{x^{(1)}(t_h)}{1!} h + \frac{x^{(2)}(t_h)}{2!} h^2 + \\ + \dots + \frac{x^{(n)}(t_h)}{n!} h^n + \dots$$

С учетом исходного уравнения  $x^{(i)} = f(x, t)$  ряд представится

$$x(t_{h+1}) = x(t_h) + f(x(t_h), t_h) h + f^{(1)}(x(t_h), t_h) h^2/2 + \dots$$

Алгоритм Тейлора получается при ограничении  $p$ -м членом ряда и замене:  $x(t_{h+1}) \rightarrow x_{h+1}$ ;  $x(t_h) \rightarrow x_h$

$$x_{h+1} = x_h + f(x_h, t_h) \frac{h}{1!} + \dots + f^{(p-1)}(x_h, t_h) \frac{h^p}{p!}. \quad (7.20)$$

Ошибка отсечения быстро убывает с ростом степени алгоритма (как  $h^p$ ); соответственно при заданной ошибке чем выше  $p$ , тем большим может быть шаг, что дает существенное снижение объема вычислений.

Алгоритм Тейлора в форме (7.20) на практике не применяется в связи с трудностями вычислений значений входящих в него производных, число которых растет с повышением порядка.

Лишь при  $p = 1$  не требуется вычисления производной — из (7.20) получается простейший *прямой или явный алгоритм Эйлера*, учитывающий только линейные члены разложения:

$$x_{h+1} = x_h + hf(x_h, t_h). \quad (7.21)$$

Здесь ошибка отсечения будет довольно большой — верхняя граница ошибки убывает недостаточно быстро (как  $Kh^2$ ), так что необходимо принимать шаг очень малым, но при этом влияние ошибки округления часто приводит к численной неустойчивости, что практически исключает применение алгоритма. Геометрический смысл алгоритма состоит в замене истинного хода кривой решения изменением по касательной в исходной точке  $x_h, t_h$ .

В алгоритмах Рунге—Кутты различного порядка производится замена вычислений значений производных в алгоритме Тейлора вычислениями значений функции в нескольких промежуточных точках шага. Эта замена требует сложных преобразований, что резко усложняет контроль над распространением ошибок и затрудняет оценку нужного шага.

Наибольшее применение находит алгоритм Рунге—Кутты четвертого порядка, который записывают в следующем виде ( $k = n$ ):

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4); \\ k_1 &= f(x_n, t_n); \\ k_2 &= f[x_n + hk_1/2, t_n + h/2]; \\ k_3 &= f[x_n + hk_2/2, t_n + h/2]; \\ k_4 &= f[x_n + hk_3, t_n + h]. \end{aligned} \right\} \quad (7.22)$$

Здесь  $k_i$  представляют наклоны — угловые коэффициенты касательных в различных точках:  $k_1$  — в начальной точке  $x_n, t_n$ ;  $k_2, k_3$  — в середине шага и ординатах, определяемых по  $k_1$  и  $k_2$ ;  $k_4$  — в конце интервала и ординате, найденной по значению  $k_3$ . Усредненное с весовыми коэффициентами значение вычисленных наклонов определяет приращение решения.

Приведенный алгоритм согласуется с алгоритмом Тейлора при  $p = 4$ , так что методическая погрешность, зависящая от шага как  $Kh^5$ , невелика и вычисления можно проводить с относительно большим шагом. При этом устраняется главная трудность — необходимость вычислений производных, правда, ценой вычисления самой функции в четырех точках. Последнее в случае сложных функций все же связано с довольно большой затратой времени.

Алгоритмы Рунге—Кутта являются явными — искомое решение не входит в правую часть выражения; как в любом одношаговом методе, вычисления здесь начинаются сразу с заданной начальной точки  $x_0, t_0$ .

**Многошаговые методы.** К многошаговым методам относятся также широко применяемые на практике методы прогноза и коррекции, в которых используется информация о предыдущих точках, полученных в процессе вычисления. Из множества многошаговых численных методов приведем наиболее употребительные алгоритмы Адамса—Бэшфорта и Адамса—Мултона.

1. *Формулы Адамса — Бэшфорта* различного порядка относятся к явным алгоритмам — искомое значение решения появляется только в левой части. Общее выражение алгоритма  $k$ -го порядка имеет вид

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h [a_0(k) f(x_n, t_n) + a_1(k) f(x_{n-1}, t_{n-1}) + \\ &+ \dots + a_{k-1}(k) f(x_{n-k+1}, t_{n-k+1})]. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Коэффициенты  $a_k$  зависят от  $k$  и определяются из решения соответствующей системы уравнений.

При  $k = 1$  получаем алгоритм первого порядка, совпадающий с прямым или явным алгоритмом Эйлера (7.22).

При  $k = 3$  получается часто применяемый трехшаговый алгоритм Адамса—Бэшфорта третьего порядка:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{12} [23f(x_n, t_n) - 16f(x_{n-1}, t_{n-1}) + 5f(x_{n-2}, t_{n-2})]. \quad (7.24)$$

Для начала вычислений необходимо иметь значения функций в  $k = 3$  предыдущих точках.

2. *Алгоритм Адамса — Мултона* является *неявным* — искомое значение решения входит как в левую, так и в правую части формулы, которая в случае  $k$ -го порядка выражается следующим образом:

$$x_{n+1} = x_n + h [b_{-1}(k)f(x_{n+1}, t_{n+1}) + b_0(k)f(x_n, t_n) + \dots + b_{n-2}(k)f(x_{n-h+2}, t_{n-h+2})]. \quad (7.25)$$

Коэффициенты определяются из решения соответствующей системы линейных уравнений.

При  $k = 1$  получается алгоритм первого порядка, называемый *обратным* или *неявным* алгоритмом Эйлера:

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_{n+1}, t_{n+1}). \quad (7.26)$$

При  $k = 2$  имеем алгоритм второго порядка, называемый *трапецидальным*:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} [f(x_{n+1}, t_{n+1}) + f(x_n, t_n)]. \quad (7.27)$$

При  $k = 3$  получаем более точный двухшаговый алгоритм Адамса—Мултона третьего порядка:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{12} [5f(x_{n+1}, t_{n+1}) + 8f(x_n, t_n) - f(x_{n-1}, t_{n-1})]. \quad (7.28)$$

Здесь требуется  $(k - 1) = 2$  значения функции в двух предыдущих точках.

Так как искомое значение  $x_{n+1}$  в неявных алгоритмах входит в правую часть под знаком нелинейной функции, то оно может быть определено из решения функционального уравнения, представленного в виде

$$x_{n+1} = g(x_{n+1}),$$

где  $g(x_{n+1})$  — правая часть (7.25), или в виде

$$F(x_{n+1}) = g(x_{n+1}) - x_{n+1} = 0.$$

Как было показано в § 2.7, числовое решение этих уравнений на каждом шаге следует находить методом простой итерации или по методу Ньютона—Рафсона. При выборе не слишком большого шага сходимость итерации обеспечивается. Убыстрить процесс итерации здесь можно, если получать начальное значение  $x_{n+1}^0$  с помощью простой прямой формулы Эйлера.

Для применения многошаговых методов необходимо предварительно определить решения в требуемом числе предыдущих точек — без этого при известной только одной начальной точке  $x_0$ ,  $t_0$  запуск алгоритма невозможен. Для вычисления нужного числа предыдущих точек применяют одношаговый метод — алгоритм Рунге—Кутты. После расчетов на необходимых нескольких шагах переходят к более эффективному многошаговому методу, завершающему вычисления.

Таким образом, используется комбинация предварительного одношагового алгоритма — *предсказания* и основного — многошагового — *коррекции*.

Преимущество многошаговых алгоритмов состоит в возможности более легкого контроля над распространением ошибки и, кроме того, в большей эффективности, так как в алгоритмах (7.24) и (7.28) требуется вычисление функции в двух точках, а не в четырех, как при формуле (7.22) Рунге—Кутты.

Формулы вычислений, рассмотренные для одномерного уравнения, непосредственно обобщаются на систему  $n$  уравнений состояния. Для простоты рассмотрим обобщение формулы Эйлера (7.21) на систему двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} dx_1/dt &= f_1(x_1, x_2, t); \\ dx_2/dt &= f_2(x_1, x_2, t), \end{aligned} \right\} \quad (7.29)$$

удовлетворяющих двум начальным условиям: при  $t = t_0$

$$x_1(t_0) = x_{10}; \quad x_2(t_0) = x_{20}.$$

Если в разложении искомых решений  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  в ряд Тейлора ограничиться линейными членами и согласно (7.29) производные переменных заменить правыми частями, то получим

$$\left. \begin{aligned} x_{1(n+1)} &= x_{1(n)} + hf_1(x_{1(n)}, x_{2(n)}, t_n); \\ x_{2(n+1)} &= x_{2(n)} + hf_2(x_{1(n)}, x_{2(n)}, t_n). \end{aligned} \right\}$$

С помощью этих формул следует последовательно (начиная от момента  $t = t_0$ ) на каждом интервале вычислить прира-



щения  $hf_k$  (вторые слагаемые), добавить их к значениям переменных в начале интервала и получить новые значения переменных в конце интервала. Последовательность вычислений на интервалах можно представить следующим образом:

1)  $t = t_0$ ; значения переменных

$$x_{10} = x_1(t_0); \quad x_{20} = x_2(t_0).$$

2)  $t = t_1 = t_0 + h$ ; приращения переменных

$$\Delta f_{10} = hf_{10} = hf_1(x_{10}, x_{20}, t_0);$$

$$\Delta f_{20} = hf_{20} = hf_2(x_{10}, x_{20}, t_0);$$

значения переменных в конце первого интервала

$$x_{1(1)} = x_{10} + hf_{10};$$

$$x_{2(1)} = x_{20} + hf_{20}.$$

3)  $t = t_2 = t_1 + h$ ; приращения переменных

$$\Delta f_{1(1)} = hf_{1(1)} = hf_1(x_{1(1)}, x_{2(1)}, t_1);$$

$$\Delta f_{2(1)} = hf_{2(1)} = hf_2(x_{1(1)}, x_{2(1)}, t_1);$$

значения переменных в конце второго интервала

$$x_{1(2)} = x_{1(1)} + hf_{1(1)};$$

$$x_{2(2)} = x_{2(1)} + hf_{2(1)} \text{ и т. д.}$$

## § 7.7. Понятие о численной устойчивости.

### Дискретные модели цепи

Под численной устойчивостью алгоритма понимают способность с ростом числа шагов сохранять в ограниченных пределах локальную методическую ошибку и ошибку округления при значении шага  $h \rightarrow 0$ . Следует отметить, что обеспечение устойчивости, т. е. отсутствия неограниченного роста ошибки, хотя не гарантирует получения нужной точности вычисления, но является необходимым для любого алгоритма.

На практике встречаются задачи, в которых необходимо получать решения при изменении шага в довольно больших пределах. Здесь проблема обеспечения устойчивости приобретает решающее значение.

Как было отмечено, неявные алгоритмы Адамса—Мултона требуют на каждом шаге числового решения функциональных нелинейных уравнений. Несмотря на это, *неявные алгоритмы относятся к наиболее перспективным* методам решения систем уравнений состояния с заданными начальными условиями.

Это объясняется их важным преимуществом — значительно большей численной устойчивостью. Простые неявные алгоритмы первого и второго порядков — обратная Эйлера и трапецеидальная — способны обеспечивать численную устойчивость при любом шаге. Нужную величину шага здесь выбирают из условия требуемой точности, т. е. допустимой методической ошибки.

Остановимся кратко на задаче, где особо важна устойчивость, — на проблеме большого разброса постоянных времени или так называемых «жестких» уравнений, решения которых состоят из участков с очень быстрыми и очень медленными изменениями. Типичным примером может служить рассматриваемая в гл. 9 схема мультивибратора-генератора прямоугольных импульсов, в которых длительности фронта и плоской части могут различаться на много порядков. Если выбрать по условию устойчивости на участке быстрого изменения шаг малым и сохранить его, то для участка медленного изменения потребуется очень большое число шагов, что связано с напрасной тратой значительного машинного времени.

Для числового решения «жестких» уравнений необходимо иметь алгоритм, позволяющий в широком диапазоне изменять шаг в процессе вычислений — при переходе к участкам с другой скоростью изменения решения. При этом очень важно, чтобы была обеспечена численная устойчивость.

Требованиям, предъявляемым к методам решения «жестких» уравнений, удовлетворяют: неявный алгоритм Эйлера, трапецеидальный алгоритм и неявные многошаговые алгоритмы Гира различных порядков (до 3—4-го).

Алгоритм Гира *первого* порядка совпадает с обратной формулой Эйлера. Алгоритм Гира *второго* порядка имеет вид

$$x_{n+1} = \frac{1}{3} [4\dot{x}_n - x_{n-1} + 2hf(x_{n+1}, t_{n+1})].$$

Изложим кратко некоторые положения понятия численной устойчивости многошаговых алгоритмов. Проверку устойчивости производят на тестовом примере простейшего линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$\dot{x} = f(x, t) = -\gamma x; \quad x(0) = 1 \quad (7.30)$$

с известным точным решением

$$x = e^{-\gamma t}.$$

При вещественном и положительном  $\gamma$  экспонента затухает с постоянной времени  $\tau = 1/\gamma$ . В общем же случае коэффициент  $\gamma$  может быть комплексным. Выбор в качестве тестового урав-

нения (7.30) обусловлен тем, что оно в силу простоты позволяет получать соотношения устойчивости в явном виде. Кроме того, при малом шаге алгоритма нелинейное уравнение в окрестности исходной точки в процессе вычислений линеаризуется, так что алгоритм, обеспечивающий ограниченность ошибки при решении тестового уравнения (7.30), сохраняет ее при числовом решении других уравнений.

Применение исследуемого алгоритма к уравнению (7.30) приводит к линейному разностному уравнению относительно  $x_n$ , решение которого в некоторой степени аналогично решению линейного дифференциального уравнения. Из общего вида этого решения можно сделать заключение об асимптотическом поведении  $x_n$  при неограниченном росте числа шагов  $n \rightarrow \infty$ : если при  $\operatorname{Re} \gamma > 0$   $|x_n| \rightarrow 0$ , то алгоритм при выбранном малом шаге численно устойчив.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим алгоритм Адамса—Бэшфорта второго порядка, который имеет вид

$$x_{n+1} = x_n + h \left[ \frac{3}{2} f(x_n, t_n) - \frac{1}{2} f(x_{n-1}, t_{n-1}) \right]. \quad (7.31)$$

Применение этого алгоритма к уравнению (7.30) с учетом того, что  $f(x_h, t_h) = -\gamma x_h$ , дает

$$x_{n+1} = x_n - h\gamma \left[ \frac{3}{2} x_n - \frac{1}{2} x_{n-1} \right].$$

Полученное выражение представляет однородное линейное разностное уравнение с постоянными коэффициентами

$$x_{n+1} - x_n(1 - 3\sigma/2) - (\sigma x_{n-1}/2) = 0, \quad (7.32)$$

где  $\sigma = h\gamma$  при заданном  $\gamma$  определяется значением шага.

Общее решение линейного однородного уравнения (7.32) второго порядка имеет вид

$$x_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n, \quad (7.33)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  — корни характеристического уравнения, которые принимаются различными ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ );  $c_1, c_2$  — произвольные постоянные, определяемые по известным значениям  $x_0, x_1$ .

Характеристическое уравнение  $P(\lambda) = 0$  получается при подстановке в разностное уравнение искомого решения в виде  $x_n = c\lambda^n$ . Для уравнения (7.32) имеем

$$\lambda^{n-1}[\lambda^2 - \lambda(1 - 3\sigma/2) - \sigma/2] = \lambda^{n-1}P(\lambda) = 0. \quad (7.34)$$

Характеристическое уравнение  $P(\lambda) = 0$  второго порядка имеет два корня  $\lambda_1^n$  и  $\lambda_2^n$ , значения которых зависят от  $\sigma = \gamma h$ , т. е. от шага.

Из выражения (7.33) следует вывод: модули корней характеристического уравнения не должны превышать единицы:  $|\lambda_i| \leq 1$ , иначе при  $n \rightarrow \infty$   $|x_n| \rightarrow \infty$ .

В случае равных (кратных) корней  $\lambda_1^n = \lambda_2^n$  общее решение (7.32) получит вид

$$x_n = (c_1 + c_2 n) \lambda_1^n. \quad (7.35)$$

Так как при конечном  $|\lambda_1^n| = 1$  и  $n \rightarrow \infty$  значение  $x_n \rightarrow \infty$ , а не к нулю, к которому стремится точное решение  $x(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ , то следует вывод: корни с модулем  $|\lambda_i| = 1$  характеристического уравнения, соответствующего устойчивому алгоритму, должны быть простыми (некратными).

Приведенные выводы и соотношения непосредственно переносятся на случай алгоритма и соответствующих ему разностного и характеристического уравнений более высокого порядка.

Характеристические уравнения, соответствующие устойчивым алгоритмам при  $\sigma = \gamma h \rightarrow 0$ , имеют один простой корень  $\lambda_1 = 1$ . Остальные корни должны иметь модули  $|\lambda_i| < 1$ , т. е. лежать строго внутри круга единичного радиуса. Этим условиям удовлетворяет рассмотренный в виде примера алгоритм (7.31), характеристическое уравнение которого при  $\sigma \rightarrow 0$   $P(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$  имеет корни  $\lambda_1 = 1$  и  $\lambda_2 = 0$ .

Численная устойчивость обеспечивает ограниченность локальных ошибок отсечения и округления при  $n \rightarrow \infty$  и достаточно малом шаге. Но малый шаг приводит к очень большому числу шагов вычислений и увеличению машинного времени, а также к возрастанию ошибки округления, т. е. к понижению точности. Поэтому всегда желательно проводить вычисления с достаточно большим шагом. Алгоритм, устойчивый при  $h \rightarrow 0$ , может быть устойчивым и при  $h \neq 0$ .

Для оценки предельно допустимой величины шага вводят понятие абсолютной устойчивости. Алгоритм считается абсолютно устойчивым для тех значений  $\sigma = \gamma h$ , для которых корни характеристического полинома  $P(\lambda)$  лежат в круге единичного радиуса. Областью абсолютной устойчивости называют множество значений  $\sigma = \gamma h$ , для которых соблюдается указанное условие ограничения на модули корней характеристического уравнения, соответствующего алгоритму.

Рассмотрим определение областей абсолютной устойчивости простейших алгоритмов.

За исходное положение принимается область устойчивости в виде круга единичного радиуса  $|\lambda| = 1$  на комплексной плоскости ( $\lambda$ ). Граничную окружность, уравнение которой можно записать в виде  $\lambda = e^{j\theta}$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ), необходимо преобразо-

вать в замкнутую кривую  $C_\sigma$  на комплексной плоскости переменной  $\sigma = \gamma h$ , определяющей область устойчивости в зависимости от интересующей нас величины шага. Для выполнения указанного преобразования необходимо из выражения характеристического уравнения  $P(\lambda) = 0$ , соответствующего рассматриваемому алгоритму, получить значение  $\sigma = \gamma h$  в функции от  $\lambda$  и положить  $\lambda = e^{j\theta}$ .

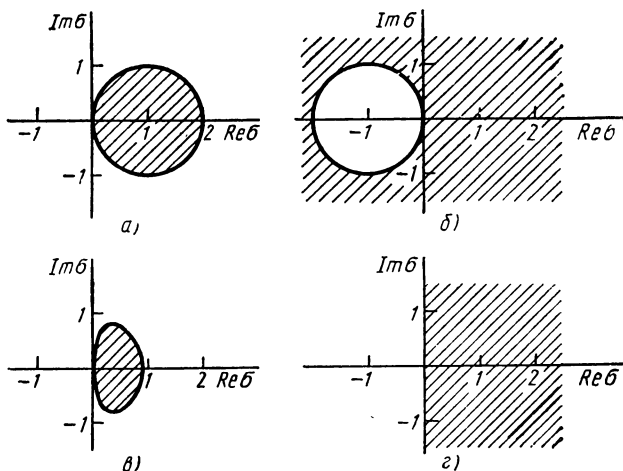


Рис. 7.16

Найдем области абсолютной устойчивости для четырех алгоритмов.

1. *Явный алгоритм Эйлера.* Из формулы (7.21) с учетом (7.30) имеем

$$x_{n+1} = x_n + h\lambda x_n; \quad \lambda^{n+1} - \lambda^n + \sigma \lambda^n = 0.$$

Отсюда при  $\lambda = e^{j\theta}$

$$\sigma = 1 - \lambda = 1 - e^{j\theta}; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Как легко убедиться, получилось уравнение окружности единичного радиуса с центром в точке  $\sigma = 1$ , представляющей границу устойчивой области. Устойчивые точки  $0 \leq \lambda \leq 1$  переходят в точки  $0 \leq \sigma \leq 1$ , так что к области абсолютной устойчивости на плоскости ( $\sigma$ ) относятся внутренние (заштрихованные) точки круга (рис. 7.16, а).

2. *Неявный алгоритм Эйлера.* Применяя формулу алгоритма (7.26) и (7.30), имеем

$$x_{n+1} = x_n - \sigma x_{n+1}; \quad \lambda^{n+1} - \lambda_n + \sigma \lambda^{n+1} = 0$$

Отсюда

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} - 1 = e^{-j\theta} - 1; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Границей устойчивой зоны является также окружность  $C_\sigma$  единичного радиуса с центром в точке  $\sigma = -1$  (рис. 7.16, б). Точка  $\lambda = 0$  в устойчивой области плоскости ( $\lambda$ ) переходит в точку  $\sigma = \infty$ ; следовательно, к устойчивой области плоскости ( $\sigma$ ) относятся все точки вне окружности  $C_\sigma$ . Как видим, область численной устойчивости неявного алгоритма Эйлера намного больше области явного — он практически при любом шаге устойчив.

3. Явный алгоритм Адамса—Бэшфорта второго порядка. Из выражения (7.34) характеристического полинома

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{-2(\lambda^2 - \lambda)}{\lambda - 1} = 2(e^{j\theta} - e^{j2\theta})/(3e^{j\theta} - 1) = \\ &= (1 - e^{j\theta})/(3 - e^{-j\theta}); \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.\end{aligned}$$

Придавая различные значения  $\theta$ , можно построить граничную кривую, охватывающую устойчивую область и показанную на рис. 7.16, в.

4. Неявный (трапецеидальный) алгоритм второго порядка. Применение выражения алгоритма (7.27) к (7.30) дает

$$x_{n+1} = x_n - \sigma(x_{n+1} + x_n)/2; \quad \lambda^{n+1} - \lambda^n + \sigma(\lambda^{n+1} + \lambda^n)/2 = 0.$$

Отсюда для граничной линии имеем

$$\begin{aligned}\sigma &= 2(1 - \lambda)/(1 + \lambda) = 2(1 - e^{j\theta})/(1 + e^{j\theta}) = \\ &= -j2 \operatorname{tg} \theta/2; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.\end{aligned}$$

Функция чисто мнимая — граничная линия совпадает с мнимой осью. При  $\lambda = 0$   $\sigma = 2$ , так что областью устойчивости является вся правая полуплоскость (рис. 7.16, г).

Сравнение с предыдущим случаем показывает еще раз, что неявный алгоритм обладает значительно большей областью устойчивости, чем явный алгоритм того же порядка.

Аналогичным образом можно получить области устойчивости для алгоритмов более высокого порядка. Характерным при этом является уменьшение зоны устойчивости с повышением порядка (числа шагов) алгоритма. Эту тенденцию можно усмотреть, сравнивая алгоритмы 3 и 4 с алгоритмами 1 и 2.

Приведенные краткие сведения о численной устойчивости показывают, что неявные алгоритмы по сравнению с явными обладают значительно большими областями абсолютной устойчивости, в частности, алгоритмы неявный Эйлера и трапецеидальный.

дальный оказываются устойчивыми при любом шаге. Поэтому при использовании неявных алгоритмов можно выбирать шаг достаточно большим, исходя только из условий получения необходимой точности. Достижимый при этом выигрыш компенсирует необходимость решения на каждом шаге нелинейного функционального уравнения, так что неявные алгоритмы Адамса—Мултона являются более предпочтительными при решении систем уравнений состояния по сравнению с другими, возможно более точными алгоритмами. Особенно важно, как указывалось, обеспечение устойчивости при решении жестких уравнений, где приходится изменять шаг в очень широких пределах. Требованиям решения жестких уравнений удовлетворяют только неявные алгоритмы Адамса—Мултона не выше второго порядка (обратный Эйлера и трапецеидальный) и неявный алгоритм Гира различных порядков, как второго, так и более высоких порядков; последние, очевидно, могут обеспечить большую точность.

В заключение приведем дискретные модели или схемы замещения для нелинейных емкостных и индуктивных элементов, связанные с принятым неявным численным алгоритмом. С помощью дискретных моделей, замещая  $C$ - и  $L$ -элементы, можно численный анализ нелинейных динамических цепей свести к последовательному анализу на каждом шаге нелинейных резистивных цепей.

Примем для простоты в качестве исходного алгоритма неявную или обратную формулу Эйлера (7.26) и получим с ее помощью связанные с ней дискретные модели для емкостного и индуктивного элементов.

1. **Емкостный элемент.** Динамическая емкость элемента, управляемого напряжением  $C(u) = dq(u)/du$ , и его вольт-амперная характеристика  $i = C(u)\dot{u}$ ;  $\dot{u} = i/C(u)$ . При  $t = t_{n+1}$  имеем

$$\dot{u}(t_{n+1}) = i(t_{n+1})/C(u(t_{n+1})). \quad (7.36)$$

Используя неявный алгоритм Эйлера  $u_{n+1} = u_n + hu_{n+1}$  и заменяя в (7.36)  $u(t_{n+1}) \rightarrow u_{n+1}$ ;  $i(t_{n+1}) \rightarrow i_{n+1}$ , получим

$$i_{n+1} = [C(u_{n+1})/h] (u_{n+1} - u_n) = g_C(u_{n+1}). \quad (7.37)$$

Выражение (7.37) представляет вольт-амперную характеристику нелинейного резистивного элемента с напряжением  $u_{n+1}$  и током  $i_{n+1}$ , так что нелинейный емкостный элемент на  $(n+1)$ -м шаге расчета можно заменить нелинейным резистивным элементом (рис. 7.17, а). В случае линейной (постоянной) емкости получим дискретную схему рис. 7.17, б.

2. **Индуктивный элемент.** Динамическая индуктивность элемента, управляемого током  $L(i) = d\psi(i)/di$ , и его характеристика  $u = L(i)di/dt$ ;  $i = u/L(i)$ . При  $t = t_{n+1}$

$$\dot{i}(t_{n+1}) = u(t_{n+1})/L(i(t_{n+1})). \quad (7.38)$$

С помощью неявного алгоритма Эйлера  $i_{n+1} = i_n + h\dot{i}_{n+1}$  при замене  $i(t_{n+1}) \rightarrow i_{n+1}$ ;  $u(t_{n+1}) \rightarrow u_{n+1}$  в (7.38) имеем

$$u_{n+1} = [L(i_{n+1})/h](i_{n+1} - i_n) = r_L(i_{n+1}). \quad (7.39)$$

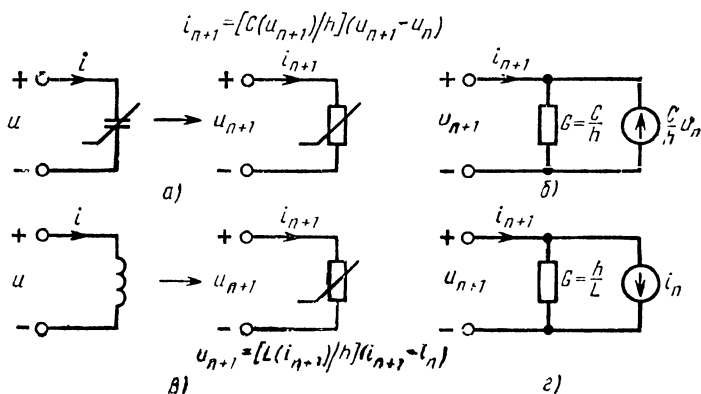


Рис. 7.17

Соотношение это также представляет вольт-амперную характеристику нелинейного резистивного элемента, которым можно заменить индуктивный элемент на  $(n+1)$ -м шаге (рис. 7.17, б). В случае постоянной индуктивности получим дискретную схему, показанную на рис. 7.17, г. Аналогичным образом можно получить дискретные модели на основе более точных неявных алгоритмов — трапецидального и Гира.

Замена всех реактивных элементов дискретными моделями позволяет свести анализ нелинейных динамических цепей к анализу последовательности нелинейных резистивных цепей на каждом шаге численного расчета. Как было установлено в гл. 2, для анализа таких цепей можно применить алгоритм Ньютона—Рафсона или использовать соответствующие ему линеаризованные дискретные схемы замещения.

Числовое решение дискретной резистивной модели нелинейной динамической цепи дает тот же результат, что и применение принятого неявного алгоритма к системе нелинейных



уравнений состояния исходной цепи. Преимущество дискретной модели состоит в том, что отпадает необходимость в трудоемкой процедуре составления уравнений состояния. Но ее применение затруднительно в тех случаях, когда требуется в процессе вычислений автоматически менять значения шага.

## ГЛАВА 8

### ПРИБЛИЖЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ

#### § 8.1. Общие замечания

Исследование периодических режимов имеет очень большое значение в теории нелинейных цепей. Для многих широко используемых на практике устройств и приборов (например, генераторов гармонических колебаний) периодический режим является обязательным рабочим состоянием. Здесь весьма важно выяснение условий возникновения и устойчивости, влияния параметров элементов цепи на амплитуду, частоту и форму установившихся колебаний, а также оценка времени и характера переходного процесса. Для других устройств, таких, как усилители, системы автоматического регулирования и т. п., установившиеся колебания на должны иметь места, лишь в некоторых случаях могут быть допущены колебания с малыми амплитудами, не превышающими заданных значений.

Характер периодических режимов в нелинейных цепях получается существенно иным, чем в асимптотически устойчивых линейных цепях. Периодический режим в устойчивых нелинейных цепях является установившейся или вынужденной реакцией на приложенное периодическое воздействие. При этом установившееся колебание содержит только те гармоники, которые имеются во входном сигнале, а период колебания совпадает с периодом внешнего периодического сигнала. При отсутствии внешнего воздействия периодический режим возможен только в цепи без потерь, т. е. в автономной консервативной цепи. Практически такой режим из-за неизбежных потерь не наблюдается.

В нелинейных цепях периодические процессы получают намного сложнее. Периодические режимы могут возникать:

1. В автономных системах — не только консервативных, но главным образом диссипативных (системы с потерями). В зависимости от характера нелинейности, вида элементов и структуры цепи частота и форма колебаний могут быть разнообразными.

2. В неавтономных системах — в виде вынужденных колебаний. При действии одного источника периодического сигнала вынужденная реакция может быть как периодической, так и непериодической. Периодическая вынужденная реакция может иметь основную частоту колебания, кратную или дробно-кратную частоте входного сигнала или равную ей.

При действии двух источников периодических сигналов разных частот в цепи могут возникнуть колебания с большим числом различных комбинационных частот. При действии же нескольких таких источников картина необычайно усложняется.

В общем случае исследование периодических режимов в нелинейных цепях с помощью аналитических методов невозможно. Существующие в настоящее время аналитические методы применимы к ограниченному классу цепей, удовлетворяющему следующим условиям:

а) цепь — автономная или неавтономная — имеет один источник гармонического сигнала;

б) цепь описывается уравнением второго порядка (а иногда и уравнением более высокого порядка);

в) нелинейный элемент цепи имеет монотонную характеристику с несильно выраженной нелинейностью, которую можно учитывать в уравнениях некоторым малым коэффициентом или параметром;

г) при обращении в нуль параметра, учитывающего нелинейность, уравнение переходит в линейное уравнение колебательного контура без потерь с гармоническим периодическим решением; соответственно исходное нелинейное уравнение называют квазилинейным.

Уравнение, удовлетворяющее указанным условиям и поддающееся приближенному аналитическому решению, имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu f(x, \dot{x}, t). \quad (8.1)$$

Малый параметр  $\mu$ , учитывающий нелинейность цепи, входит как множитель нелинейной функции  $f$ , зависящей от переменной цепи и ее производной. Предполагается, что переменные входят в нее в виде рациональных выражений. При  $\mu \rightarrow 0$  (8.1) переходит в уравнение автономной линейной консервативной системы

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (8.2)$$

периодическое решение которого является гармонической функцией

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (8.3)$$

При  $\mu > 0$  периодическое решение будет отличаться от (8.3).

Хотя нелинейное уравнение (8.1), поддающееся приближенному аналитическому решению, имеет частный вид, тем не менее оно описывает поведение большого числа нелинейных колебательных систем, периодический режим в которых широко используется на практике. Уравнения отдельных колебательных систем различаются функциями  $f(x, \dot{x}, t)$  правой части.

К уравнениям типа (8.1) можно, в частности, отнести введенные в гл. 5 уравнения лампового генератора и колебательного контура. Приведем запись этих уравнений в предположении действия на входе цепи источника гармонического сигнала. Уравнение лампового генератора (уравнение Ван-дер-Поля):

$$\ddot{x} + x = -\mu [(1 - x^2) \dot{x} - A \cos \nu t], \quad (8.4)$$

где  $x$  — нормированное напряжение на сетке;  $t = \omega_0 t_1$  — нормированное время;  $\omega_0$  — резонансная частота контура;  $\nu = \omega/\omega_0$  — отношение частоты сигнала к резонансной частоте.

Уравнение колебательного контура с нелинейной емкостью (уравнение Дуффинга):

$$\ddot{x} + x = -\mu (x^3 + \dot{x} - A \cos \nu t), \quad (8.5)$$

где  $x$  — нормированный заряд;  $t = \omega_0 t_1$  — нормированное время;  $\omega_0$  — частота контура на линейном участке характеристики.

Если произведено нормирование времени, принятое в уравнениях (8.4) и (8.5), то условие малости нелинейного параметра сводится к выполнению неравенства  $\mu \ll 1$ .

При численном задании коэффициентов решение уравнений, очевидно, можно получить с помощью численных методов. Но главное преимущество аналитических методов состоит в том, что они позволяют произвести анализ процессов при буквенном задании ряда параметров, сделать некоторые общие заключения об условиях возникновения и устойчивости периодического режима, влиянии параметров на частоту и амплитуду колебаний и т. п. Поэтому очень важно там, где возможно, хотя бы для упрощенной модели цепи попытаться получить аналитическое решение.

Для аналитического решения уравнения (8.1) используют приближенные методы малого параметра. Искомое периодическое решение, которое принимается мало отличающимся от гармонического, представляют рядом по степеням малого параметра. Коэффициенты при степенях малого параметра, которые должны быть периодическими функциями, определяют после подстановки решения в исходное уравнение приравни-

ванием коэффициентов при одинаковых степенях параметра. К сожалению, удастся найти величины, характеризующие колебания, только при небольшом числе членов разложения. Отсюда следует, что аналитические методы дают только приближенное решение. Для обеспечения сходимости ряда величина параметра, учитывающего нелинейность, должна быть достаточно малой. При этом оказывается затруднительным оценить предельно допустимое значение параметра, обеспечивающее сходимость разложения.

В этой главе рассмотрим кратко, не вдаваясь в математические детали, следующие классические методы приближенного аналитического исследования нелинейных цепей: 1) метод возмущений; 2) метод усреднения; 3) метод гармонической линеаризации (частотный метод).

При этом будут изложены только элементарные сведения о методах. Для более подробного ознакомления рекомендуем обратиться к литературе — монографиям [1, 2, 5].

Метод гармонической линеаризации является основой приближенного частотного метода анализа нелинейных цепей, который применим к цепям более высокого порядка; метод широко используется при исследовании периодических режимов в различных системах, особенно в системах с обратными связями.

## § 8.2. Метод возмущений

Классический метод возмущений (метод А. Пуанкаре) можно применять для решения систем нелинейных уравнений состояния, содержащих малый параметр  $\mu$ . Предполагается, что правые части уравнений состояния можно представить суммой линейного и нелинейного слагаемых, причем малый параметр входит в последние в виде множителя. В случае системы из двух уравнений с переменными состояния  $x$  и  $y$  будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= X_1(x, y) + \mu X_2(x, y); \\ \dot{y} &= Y_1(x, y) + \mu Y_2(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

При  $\mu = 0$  система уравнений линейна и решение  $x_0(t)$  и  $y_0(t)$ , называемое начальным или порождающим, может быть найдено для заданных начальных условий  $x(0)$  и  $y(0)$ . При  $\mu > 0$  решение будет отличаться от начального. Это отличие при  $\mu \ll 1$  будет небольшим и решения  $x$  и  $y$  можно разложить в окрестности начальных решений в ряд по степеням  $\mu$ . Для переменной  $x$  ряд запишем как

$$x(t, \mu) = x_0(t) + x_1(t)\mu + x_2(t)\mu^2 + \dots \quad (8.7)$$

Коэффициент разложения  $x_0$  является начальным решением, которое определяется из линейного уравнения. Остальные коэффициенты  $x_k(t)$  представляют поправки к начальному решению, вызываемые «возмущающим» действием нелинейного параметра. Чем больше величина параметра, тем большее число поправок, т. е. членов разложения, должно быть учтено.

Для сходимости ряда (8.7), т. е. искомого решения, при достаточно больших значениях  $t$  коэффициенты  $x_k(t)$  должны быть ограниченными, а в случае наиболее важного периодического решения — периодическими функциями времени. Не все разложения и получаемые решения удовлетворяют этому условию. В качестве простейшего примера приведем разложение синусоидальной функции, частота которой имеет малый параметр:

$$f(t) = \sin(1 + \mu)t.$$

Для разложения в ряд Тейлора по малому параметру в окрестности  $\mu = 0$  найдем производные функции

$$\left. \frac{df}{d\mu} \right|_{\mu=0} = t \cos t; \quad \left. \frac{d^2 f}{d\mu^2} \right|_{\mu=0} = -t^2 \sin t \text{ и т. д.}$$

Разложение имеет вид

$$f(t) = \sin t + \mu t \cos t - \frac{1}{2} \mu^2 t^2 \sin t + \dots$$

Ряд содержит аperiodические неограниченно нарастающие во времени члены  $t^k \cos t$  и  $t^k \sin t$ , называемые секулярными или в е к о в ы м и членами. Ряды, содержащие секулярные члены, часто появляются при решении уравнений с помощью разложений по степеням малого параметра. Но такие решения не являются периодическими и, кроме того, ряды сходятся только при малых временах  $\mu t < 1$ . Поэтому одной из главных и трудных задач является получение решений в виде рядов, не содержащих секулярных членов.

Порядок решения систем уравнений (8.6) по методу возмущений получается следующим. Разложения  $x$ ,  $y$  по малому параметру вида (8.7) с намеченным числом членов подставляют в систему (8.6) и приравнивают выражения при одинаковых степенях  $\mu$  в левой и правой частях. В результате получаются последовательные системы линейных уравнений рекуррентного вида. Первая система (при  $\mu = 0$ ) содержит только переменные  $x_0$ ,  $y_0$ ; ее решение дает н у л е в о е приближение. Вторая система содержит переменные  $x_1$ ,  $y_1$  и известные переменные  $x_0$ ,  $y_0$  и может быть также решена относительно п е р в о й п о п р а в к и. Каждая последующая система (при  $\mu^k$ ) содержит переменные  $x_k$ ,  $y_k$  и известные приближения, вошедшие в пре-

дыдущие уравнения. Коэффициенты разложения, как видим, определяются поочередно из последовательности линейных уравнений.

При определении периодического решения системы уравнений состояния все коэффициенты разложения  $x_k(i)$ ,  $y_k(t)$  должны быть периодическими, без переходных составляющих и секулярных членов.

Условие периодичности с периодом  $T = 2\pi$  состоит в том, что значения коэффициентов при  $t = 0$  и  $t = 2\pi$  должны совпадать:

$$x_k(2\pi) = x_k(0); \quad y_k(2\pi) = y_k(0). \quad (8.8)$$

Обеспечение периодичности всех коэффициентов  $x_k$ ,  $y_k$  при большом их числе представляет наиболее трудную задачу метода. Не будем вдаваться в детали этого вопроса; отметим лишь, что условие периодичности может быть выполнено соответствующим выбором начальных (при  $t = 0$ ) значений коэффициентов  $x_k(0)$  и  $y_k(0)$  в процессе решения каждой из систем линейных уравнений для поправок, а также представлением зависимости частоты колебаний от амплитуды сигнала в виде ряда по степеням малого параметра. Из-за необходимости выполнения условий периодичности аналитическое решение уравнений состояния с относительно высоким приближением требует громоздких выкладок, что ограничивает порядок уравнения, а также порядок приближения. В большинстве случаев с помощью метода возмущений удастся получить решения лишь для первого приближения.

Преимуществами метода возмущений являются достаточная математическая строгость, принципиальная возможность уточнения решения и возможность исследования систем без предварительного представления об ожидаемых в них процессах. Однако предварительное знание ожидаемого общего характера поведения нелинейной цепи является весьма важным, так как позволяет, соответствующим образом видоизменив применение метода, существенно облегчить решение конкретной задачи.

Метод возмущений используется в основном для исследования периодического режима: 1) в автономных системах при условии, что период колебания мало отличается от периода порождающего решения; 2) в неавтономных системах, когда частота вынужденной (установившейся) реакции равна или близка к частоте внешнего сигнала.

Метод возмущений можно применять также для исследования переходных процессов в цепях первого порядка. Но для анализа переходных режимов в резонансных контурах, в ко-

торых напряжения и токи устанавливаются в виде колебаний с медленно изменяющимися амплитудами, этот метод неприемлем.

Отдельные этапы решения по методу возмущений проще всего уяснить на примерах.

Рассмотрим сначала простейший пример автономной цепи первого порядка. Требуется определить напряжение на емкости с начальным зарядом  $q(0) = Cu(0)$ , подключенной к елинейному сопротивлению, характеристику которого для упрощения выкладок примем параболической:

$$i = a_1 u + a_2 u^2.$$

Ввиду монотонности процесса разряда емкости ( $u \geq 0$ ) здесь допущено слагаемое четной степени.

Уравнение состояния цепи, записанное для напряжения на емкости, имеет вид

$$\frac{du}{dt_1} = -\frac{1}{C} i(u) = -\frac{a_1}{C} u - \frac{a_2}{C} u^2 = -\alpha_1 u - \alpha_2 u^2. \quad (8.9)$$

Решение должно удовлетворять начальному условию: при  $t = 0$   $u(0) = U_0$ .

Разделив уравнение на  $\alpha_1$ , введем нормированное время  $t = \alpha_1 t_1$  и малый параметр  $\mu = \alpha_2/\alpha_1 = a_2/a_1$ :

$$du/dt = -u - \mu u^2. \quad (8.10)$$

Будем искать решение в виде ряда (8.7), ограничившись для простоты двумя членами, т. е. только нулевым и первым приближением:

$$u = u_0 + u_1 \mu. \quad (8.11)$$

Подставив искомое решение и его производную в уравнение (8.9), получим

$$\dot{u}_0 + \dot{u}_1 \mu = -u_0 - (u_1 + u_0^2) \mu.$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях  $\mu$  дает систему из двух линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_0 &= -u_0; \\ \dot{u}_1 &= -u_1 - u_0^2. \end{aligned} \right\}$$

Из первого уравнения при начальном условии  $u_0(0) = U_0$  определяем порождающее решение

$$u_0 = U_0 e^{-t}, \quad (8.12)$$

которое соответствует пренебрежению нелинейным членом ( $\mu = 0$ ) и разряду емкости через сопротивление  $1/a_1$ .

При учете полученного решения нулевого приближения второе уравнение системы для первой поправки получится неоднородным, с правой частью

$$\dot{u}_1 = -u_1 - U_0^2 e^{-2t}. \quad (8.13)$$

Начальное условие  $u(0) = U_0$  для результирующего решения использовано при определении  $u_0$ . Поэтому решение (8.31) определяется при нулевом начальном условии.

Частное решение ищем в виде экспоненты  $A \exp(-2t)$ , подстановка которой в (8.13) дает  $A = U_0^2$ . Свободная составляющая равна  $B \exp(-t)$ . Поэтому решением (8.13) при нулевом начальном условии будет

$$u_1 = -U_0^2 e^{-t} + U_0^2 e^{-2t}. \quad (8.14)$$

Аналогично с использованием полученных решений для  $u_0$  и  $u_1$  можно найти решение для второго приближения и т. д.

Полное решение согласно (8.11) при  $\mu = a_2/a_1$  и  $t_1 = t/\alpha_1$  записывают так

$$u = U_0 e^{-t_1/\alpha_1} + \frac{a_2}{a_1} U_0^2 (e^{-2t_1/\alpha_1} - e^{-t/\alpha_1}). \quad (8.15)$$

Напряжение на емкости убывает более сложным образом, чем по закону одной (первой) экспоненты в случае разрядки на постоянное сопротивление.

В качестве примера неавтономной цепи, присоединенной к источнику синусоидального напряжения, возьмем высокодобротный колебательный контур с нелинейной емкостью. Будем рассматривать установившиеся колебания с частотой внешнего сигнала, близкой к резонансной частоте контура на начальном линейном участке характеристики емкости. Режим в контуре вблизи резонанса при принятых условиях характеризуется скачкообразными изменениями напряжений и токов, которые свойственны свободным процессам. Следовательно, установившиеся колебания в контуре близки по характеру к свободным колебаниям. Для учета указанного ожидаемого процесса порождающее решение должно совпасть со свободными колебаниями, что может быть достигнуто введением множителя перед функцией возбуждения. Это означает, что амплитуда вынуждающей силы принимается малой и процессы происходят в окрестности свободных колебаний линейной системы. Соответственно разложение решения должно производиться в окрестности свободных колебаний.

Если бы частота внешнего сигнала отличалась от резонансной, то решение следовало бы разлагать в окрестности вынужденных колебаний и амплитуда сигнала могла бы быть любой.



Согласно сказанному уравнение цепи (8.5) при пренебрежении потерями, т. е. слагаемым с производной, можно записать в виде (время не нормировано)

$$\dot{x} + \omega_0^2 x = -\varepsilon b x^3 + \varepsilon U \cos \omega t. \quad (8.16)$$

Решение ищем в виде ряда (8.7), коэффициенты которого должны быть периодическими функциями времени. Для упрощения выкладок учитываем только два члена

$$x = x_0 + \varepsilon x_1. \quad (8.17)$$

Подставив это выражение в (8.16), получим линейные уравнения для приближений; решение этих уравнений содержит апериодические нарастающие секулярные члены. Для устранения незатухающих колебаний частоту колебаний необходимо принять зависящей от амплитуды

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon \beta_1(A) + \varepsilon^2 \beta_2(A) + \dots \quad (8.18)$$

Подобное допущение физически оправдано — с увеличением амплитуды напряжения средняя крутизна характеристики емкости  $q(u)$  и средняя емкость уменьшаются, так что собственная частота колебаний возрастает.

Подставив в (8.16) представление (8.17) и  $\omega_0^2 = \omega^2 - \varepsilon \beta_1(A)$ , получим равенство, в котором сохранены члены с нулевой и первой степенями  $\varepsilon$ :

$$\dot{x}_0 + \varepsilon \ddot{x}_1 = -x_0 \omega^2 - \varepsilon [x_1 \omega^2 - x_0 \beta_1(A) + b x_0^3] + \varepsilon U \cos \omega t.$$

Порождающее уравнение

$$x + \omega^2 x_0 = 0$$

при начальных условиях: при  $t = 0$   $x_0(0) = A$ ;  $\dot{x}_0(0) = 0$  дает порождающее решение

$$x_0 = A \cos \omega t. \quad (8.19)$$

Уравнение для первой поправки

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \beta_1(A) x_0 - b x_0^3 + U \cos \omega t$$

после подстановки (8.19) принимает вид

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \left[ \beta_1(A) - \frac{3}{4} b A^3 + U \right] \cos \omega t - \frac{1}{4} b A^3 \cos 3\omega t. \quad (8.20)$$

Для исключения секулярного члена необходимо принять

$$\beta_1(A) = \frac{3}{4} b A^3 - U/A. \quad (8.21)$$

В этом случае решение уравнения (8.20) при нулевых начальных условиях будет

$$x_1 = -(bA^3/32\omega^2) (\cos \omega t - \cos 3\omega t).$$

Полное решение после первого приближения записывают как

$$x = A \cos \omega t - (bA^3/32\omega^2) (\cos \omega t - \cos 3\omega t). \quad (8.22)$$

Решение, кроме колебания основной частоты, содержит третью гармонику. Учет второй поправки привел бы к появлению пятой гармоники.

Рассмотрим зависимость амплитуды колебаний в контуре от частоты. Введем в условие (8.21) частоту с помощью представления (8.18) при сохранении двух слагаемых:

$$-\omega^2 A + \omega_0^2 A + \frac{3}{4}b^3 A^3 = U.$$

(8.23)

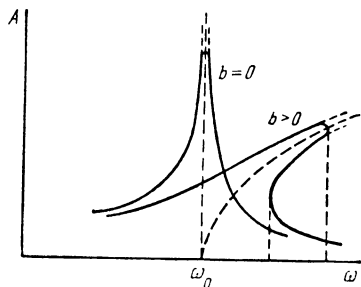


Рис. 8.1

Это кубическое уравнение может иметь один или три вещественных корней. Последнее означает, что амплитуда для заданной частоты имеет три значения.

При  $b = 0$  (линейный контур) однозначная зависимость амплитуды от частоты

$$A = U / (\omega_0^2 - \omega^2)$$

дает обычную резонансную кривую (рис. 8.1) для контура без потерь. При учете потерь, которые оказывают влияние только вблизи резонансной точки, амплитуда будет конечной. Прямая  $\omega = \omega_0$ , которая получается из (8.23) при  $U \rightarrow 0$ , является средней линией семейства кривых для различных значений  $U$ .

При  $b > 0$  средняя линия, уравнение которой, найденное из (8.23) при  $U \rightarrow 0$ :

$$A = \frac{2}{\sqrt{3b^3}} \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)},$$

получает в области  $\omega > \omega_0$  наклон вправо. Соответственно частотные характеристики, также изогнутые вправо (рис. 8.1), при  $\omega_1 > 0$  получают три значения. Если учесть потери, то при некотором значении  $\omega$  будет достигаться максимум резо-

нансной кривой, после которого ее ординаты уменьшаются с одновременным уменьшением частоты. В § 8.6 показано, что наличие падающего участка характеристики приводит к скачкам тока и напряжения.

### § 8.3. Метод усреднения

Метод усреднения, или медленно меняющихся амплитуд, применялся Ван-дер-Полем. Обоснование методу даны Л. И. Мандельштамом, Н. Д. Папелекси, Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым.

Метод усреднения используется для исследования нелинейных уравнений второго порядка с малым параметром нелинейности, решение которых имеет вид почти гармонических колебаний. Метод позволяет производить приближенный анализ как переходных, так и установившихся режимов автономных и неавтономных систем, описываемых уравнениями типа (8.11).

Суть метода состоит в следующем. При  $\mu = 0$  исходное нелинейное уравнение с нормированным временем  $t = \omega_0 t_1$  переходит в линейное порождающее уравнение второго порядка:

$$\ddot{x} + x = 0.$$

Соответствующее гармоническое порождающее решение и его производная записываются таким образом:

$$\left. \begin{aligned} x &= A \cos(t + \theta); \\ \dot{x} &= y = -A \sin(t + \theta). \end{aligned} \right\} \quad (8.24)$$

При малом  $\mu \neq 0$  принимается, что периодическая реакция цепи, если она существует, имеет почти синусоидальную форму — представляет также гармоническое колебание, амплитуда и фаза которого не являются постоянными, а медленно изменяются во времени с малой скоростью так, что в пределах любого периода амплитуда и фаза колебания могут быть приняты постоянными, а мгновенные значения — синусоидальными. Искомое решение и его производную, следовательно, можно представить как

$$\begin{aligned} x &= A(t) \cos[t + \theta(t)]; \\ y &= -A(t) \sin[t + \theta(t)]. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Поскольку закон изменения колебаний принят и тем самым задан вид общего решения, задача поиска решения сведена к нахождению функций амплитуды и фазы  $A(t)$  и  $\theta(t)$ .

Для определения неизвестных амплитуды и фазы принятые величины (8.25) и их производные

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{A}(t) \cos \psi - A(t) [1 + \dot{\theta}(t)] \sin \psi; \\ \dot{y} &= -\dot{A}(t) \sin \psi - A(t) [1 + \dot{\theta}(t)] \cos \psi, \end{aligned} \right\} \quad (8.26)$$

где  $\psi = t + \theta(t)$ , подставляют в исходную систему (8.1). В результате получается система нелинейных дифференциальных уравнений для искоемых функций амплитуды и фазы.

Точное решение этой системы невозможно. Поэтому прибегают к приближенному решению с помощью усреднения в пределах периода. Для этого сначала разрешают получившиеся уравнения относительно производных амплитуды и фазы:

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}(t) &= \mu f_1(A, \theta, t); \\ \dot{\theta}(t) &= \mu f_2(A, \theta, t). \end{aligned} \right\} \quad (8.27)$$

Затем производят усреднение — вместо мгновенных значений переходят к средним за период колебания значениям величин и их производных. Усреднение означает, что вследствие *медленного изменения достаточно знать дискретные значения амплитуды и фазы через период колебания*, а не в каждый момент времени. Средние за период  $T = 2\pi$  значения производных (8.27) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{A} &= \dot{A}_{\text{ср}}(t) = \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(A, \theta, t) dt; \\ \dot{\theta} &= \dot{\theta}_{\text{ср}}(t) = \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_2(A, \theta, t) dt. \end{aligned} \right\} \quad (8.28)$$

При вычислении интегралов в пределах периода полагаем амплитуды и фазы постоянными, так что подынтегральные выражения будут периодическими с основной частотой  $\omega_1 = 1$ . Если представить подынтегральные выражения разложенными в ряд Фурье, то значения интегралов (8.28) определяются только нулевыми гармониками, т. е. средними за период значениями, которые зависят от  $A$  и  $\theta$ . Следовательно, в результате интегрирования, т. е. усреднения, получим приближенную систему из двух уравнений первого порядка для искоемых величин:

$$\left. \begin{aligned} \dot{A} &= \mu F_1(A, \theta); \\ \dot{\theta} &= \mu F_2(A, \theta). \end{aligned} \right\} \quad (8.29)$$

Эти уравнения, называемые укороченными или усредненными, не содержат времени и поэтому намного проще исходных уравнений. Таким образом, *метод усреднения позволяет свести анализ сложной колебательной системы к анализу более простой автономной системы второго порядка*. Очевидно, для анализа автономной системы, описываемой укороченными уравнениями, можно применить метод траекторий на плоскости состояния или приближенный кусочно-линейный метод.

Многие характерные особенности решения можно выяснить из простейшего анализа укороченных уравнений. Установление колебания означает отсутствие приращения величин, т. е. равенство нулю производных:  $\dot{A} = 0$ ;  $\dot{\theta} = 0$ . Но это условие соответствует особой точке или точке равновесия системы (8.29).

Об устойчивости установившегося колебания и соответствующего ему предельного цикла можно судить по устойчивости особой точки. Установившийся периодический режим устойчив при выполнении условия  $(dF_1/dA)_0 > 0$ . Амплитуда установившегося колебания равна неотрицательному корню уравнения  $F_1(A) = 0$ .

Рассмотренное решение (8.25), представленное в полярной системе координат и введенное Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым, удобно применять для анализа автономных систем. Для анализа неавтономных систем более удобным может оказаться представление решения в декартовой системе координат, введенное Ван-дер-Полем

$$x(t) = X(t) \cos t + Y(t) \sin t.$$

Общий ход решения здесь получается таким же, как и в случае представления решения в полярной системе координат. В результате усреднения, аналогичного (8.28), получаются укороченные уравнения, не содержащие времени

$$\left. \begin{aligned} \dot{X} &= \mu F_3(X, Y); \\ \dot{Y} &= \mu F_4(X, Y). \end{aligned} \right\}$$

Применение метода усреднения, или медленно меняющихся амплитуд, рассмотрим на примере анализа процесса установления автоколебаний в ламповом генераторе. В высокочастотном генераторе с колебательным контуром высокой добротности и расположением рабочей точки на линейном участке анодно-сеточной характеристики  $i_2 = f(u_1)$  получаются условия, благоприятные для применения метода усреднения: относительно медленное (по сравнению с периодом ко-

лебания) изменение амплитуд и почти синусоидальная форма в пределах периода.

Уравнение для напряжения сетки было выведено в § 5.4. Прежде чем применять к уравнению лампового генератора метод усреднения, рассмотрим условие самовозбуждения колебаний, необходимое для возникновения автоколебаний.

Для самовозбуждения колебаний исходная точка равновесия автономной системы, соответствующая начальному значению напряжения сетки и его производной, должна быть неустойчивой. Для суждения об устойчивости точки равновесия, соответствующей  $u_1 = 0$  и  $u_1' = 0$ , линеаризуем уравнение (5.32), записанное без нормировки переменных, положив  $S_1 = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_1}{dt^2} + \omega_0^2 (RC - SM) \frac{du_1}{dt} + \omega_0^2 u_1 = \\ = \frac{d^2 u_1}{dt^2} - a \frac{du_1}{dt} + \omega_0^2 u_1 = 0. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Неустойчивости точки равновесия соответствует отрицательность коэффициента при первой производной, которая имеет место при  $a/\omega_0^2 = SM - RC > 0$ .

Следовательно, условие самовозбуждения состоит в следующем:

$$S > RC/M; \quad \mu = a/\omega_0 > 0. \quad (8.31)$$

Перепишем уравнения (5.47) лампового генератора с нормированным напряжением сетки  $x = u_1 (-3S_1 M \omega_0^2/a)^{0.5}$  и  $\tau = \omega_0 t$  ( $S_1 < 0$ ), вводя обозначения  $x = x_1$ ;  $y = x_2$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y; \\ \dot{y} &= -x + \mu(1 - x^2)y. \end{aligned} \right\} \quad (8.32)$$

Подставляем в левые части этой системы значения производных (8.26), а в правые — (8.25). После небольших преобразований получаем

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}(t) \cos \psi - \dot{\theta}(t) A(t) \sin \psi &= 0; \\ \dot{A}(t) \sin \psi + \dot{\theta}(t) A(t) \cos \psi &= \mu A \left[ (1 - A^2/4) \sin \psi - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} A^2 \sin 3\psi \right] &= \mu A f(A, \psi). \end{aligned} \right\}$$

Разрешаем эту систему с определителем  $\Delta = A$  относительно производных:

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}(t) &= \mu f(A, \psi) \sin \psi; \\ \dot{\theta}(t) &= \mu f(A, \psi) \cos \psi. \end{aligned} \right\} \quad (8.33)$$

При интегрировании правых частей в пределах от 0 до  $2\pi$  с целью усреднения все синусоидальные слагаемые правых частей исчезнут — останутся только средние значения ( $A$  и  $\theta$  принимаются постоянными). Усредненные, или укороченные, уравнения приобретут вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{A} &= \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(A, \psi) \sin \psi dt = \frac{1}{2} \mu A (1 - A^2/4); \\ \dot{\theta} &= \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(A, \psi) \cos \psi dt = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.34)$$

Получили два независимых укороченных уравнения для амплитуды, т. е. огибающей, и фазового угла колебаний. Из второго уравнения получаем для начальной фазы постоянное значение  $\theta = \theta_0$ , равное начальному фазовому углу.

Уравнение для нормированной амплитуды колебаний является нелинейным уравнением первого порядка. Приравняв нулю правую часть, получим два состояния равновесия, т. е. два значения относительной амплитуды установившегося режима  $A = 0$  и  $A = 2$ . Как было показано в § 6.2, состояние равновесия устойчиво, если знак производной от правой части уравнения первого порядка отрицателен, и неустойчиво — при положительном знаке. Для уравнения (8.34) производная от правой части

$$f'(A) = \frac{\mu}{2} (1 - 3A^2/4)$$

положительна при  $A = 0$ :  $f'(0) = \mu/2 > 0$  и отрицательна при  $A = 2$ :  $f'(2) = -\mu < 0$ , так что режим с амплитудой  $A = 2$  устойчив, а режим с  $A = 0$  — неустойчив и, следовательно, не будет наблюдаться. Неустойчивость режима с нулевой амплитудой при выполнении условия (8.3) была установлена ранее.

Амплитуда установившегося режима  $A = 2$  после денормировки с учетом (5.35)

$$U_y = \frac{2}{\sqrt{b}} = 2 \sqrt{(SM - RC)/(-3S_1 M)}.$$

Рассмотрим решение уравнения (8.34) для амплитуды колебаний. Переменные в уравнении разделяются

$$\frac{2dA}{\mu A (1 - A^2/4)} = dt.$$

Интегрируя уравнение с начальным условием: при  $t = 0$ ,  $A = A_0$ , находим

$$A^2/(4 - A^2) = A_0^2 e^{\mu t}/(4 - A_0^2).$$

Отсюда искомая медленно меняющаяся амплитуда

$$A = \frac{A_0 e^{\mu t/2}}{\sqrt{1 - (A_0/2)^2 (1 - e^{\mu t})}}. \quad (8.35)$$

Согласно (8.24) напряжение на сетке лампы изменяется по закону

$$x(t) = A_0 [1 - (A_0/2)^2 (1 - e^{\mu t})]^{-1/2} e^{\mu t/2} \cos(t + \theta_0). \quad (8.36)$$

Малый параметр входит только в положительный показатель экспоненты и определяет скорость ее нарастания. От значения  $A_0$  при  $t = 0$  амплитуда растет сначала по закону, близкому к экспоненте  $A_0 \exp \mu t/2$ ; затем скорость нарастания уменьшается. При  $t \rightarrow \infty$  достигается установившееся значение  $A_y = 2$ , которое было получено как устойчивое состояние равновесия или корень правой части первого уравнения (8.34). Как видим, амплитуда установившегося колебания не зависит от начальных условий, что характерно для явления автоколебаний. Нарастание колебаний происходит с постоянной времени

$$\tau = \frac{2}{\mu} = \frac{2}{(SM - RC) \omega_0} = \frac{2}{\omega_0 SM - 1/Q}.$$

При увеличении добротности  $Q = \sqrt{L/C}/R$  постоянная времени уменьшается и скорость нарастания колебаний возрастает, что также отличает процессы в автоколебательных системах: время установления переходного процесса в линейном колебательном контуре увеличивается с увеличением добротности.

Установившиеся колебания генератора с максимальной амплитудой соответствуют предельному циклу на фазовой плоскости (см. рис. 6.12). Постепенному нарастанию амплитуды колебаний соответствуют траектории, расходящиеся по спирали от начала координат, которое является точкой равновесия в виде неустойчивого фокуса. Метод усреднения может применяться также для анализа вынужденных периодических режимов в неавтономных системах.



#### § 8.4. Метод гармонической линеаризации (частотный метод)

Частотный метод, или метод комплексных амплитуд, для установившегося режима при действии гармонического сигнала, а также метод преобразований Фурье и Лапласа при действии сигналов произвольной формы широко используются для анализа линейных цепей. Частотный метод позволяет вводить такие общепринятые в теории линейных цепей понятия, как функции входного сопротивления (проводимости) и передачи, называемые обобщенно функциями цепи, матрицы различных параметров многополюсников и т. п.; кроме того, он позволяет исследовать реакции цепей по частотным характеристикам, нулям и полюсам функций цепей, устойчивость различных систем по частотным критериям Михайлова и Найквиста.

Для нелинейных цепей общего вида частотный метод неприменим (в силу неприменимости принципа наложения); все же возможно использовать его в приближенном виде для ограниченного, но очень важного класса нелинейных систем. К этому классу в первую очередь относятся системы с обратными связями: генераторы или осцилляторы, в которых устанавливаются почти гармонические колебания; усилители и системы автоматического управления, в которых колебания не должно быть или допускаются колебания с малыми амплитудами. Указанные системы должны находиться под действием гармонического сигнала или в автономном режиме.

Применение частотного метода (метода комплексных амплитуд) в приближенном виде основано на методе гармонической линеаризации, предложенном Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым.

Гармоническую линеаризацию, позволяющую использовать в приближенном виде метод комплексных амплитуд для анализа периодических режимов в указанном ограниченном классе нелинейных систем, можно ввести, если принять следующие допущения.

1. При действии на входе гармонического сигнала  $f_1 = A \cos \omega t$  в цепи устанавливается периодический режим с частотой, равной частоте входного сигнала. Это условие выполняется во многих практически важных устройствах, содержащих нелинейности; нормальная работа ряда систем, например генератора колебаний с независимым возбуждением, возможна только при указанном допущении. В общем случае вынужденных режимов, как отмечалось, в цепи могут установиться различные колебания — непериодические или почти

периодические, периодические, и с основной частотой реакции, не равной частоте входного сигнала; если частота выходной реакции меньше частоты входного сигнала, имеем так называемые субгармонические колебания. Для всех перечисленных случаев метод гармонической линеаризации в обычном виде неприменим.

2. Доминирующую роль в процессе играет первая гармоника, частота которой равна частоте входного сигнала, а высшие гармоники не влияют существенным образом на режим системы. Для выполнения данного условия нелинейность характеристики не должна быть слишком сильной. Кроме того, частотные характеристики цепи или системы должны быть такими, чтобы подавлять высшие гармоники, генерируемые нелинейным элементом.

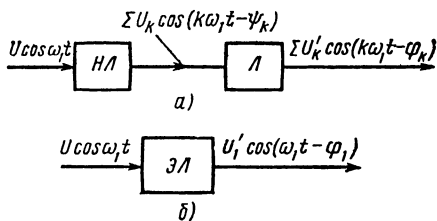


Рис. 8.2

Структуру большого числа применяемых на практике систем можно представлять состоящей из двух частей (рис. 8.2, а): нелинейной  $НЛ$  и линейной  $Л$ , составленной из  $RLC$ -элементов с постоянными коэффициентами и описываемой дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка.

При действии на входе системы гармонического сигнала на выходе нелинейного элемента получим несинусоидальное колебание, содержащее высшие гармоники. Если линейная часть имеет частотную характеристику типа характеристики фильтра нижних частот или резонансной кривой с частотой резонанса, равной частоте колебаний, то высшими гармониками, которые частично подавляются, можно пренебречь.

Приближенность метода заключается в отбрасывании всех гармоник, кроме первой. В методе гармонической линеаризации реальная система рис. 8.2, а, на выходе которой имеются гармоники всех частот

$$f_2 = a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \cos k\omega_1 t + \\ + \sum_{k=2}^{\infty} b_k \sin k\omega_1 t,$$

заменяется приближенно эквивалентной системой  $ЭЛ$  (рис. 8.2, б), выход которой содержит только основную гармо-

нику

$$f_2^2 = a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t.$$

Эквивалентность здесь понимается в том смысле, что у обеих систем амплитуда и начальная фаза гармоники основной частоты одинаковы.

Наиболее важное свойство эквивалентной нелинейной системы состоит в том, что амплитуда и фаза выходной синусоидальной реакции (коэффициенты  $a_1$  и  $b_1$ ) являются функциями амплитуды входного сигнала.

Как входной сигнал, так и выходная установившаяся реакция эквивалентной системы являются синусоидальными функциями одинаковой частоты. Поэтому при расчетах установившегося режима можно применить метод комплексных амплитуд. Комплексные амплитуды входного сигнала и реакции равны

$$\dot{F}_1 = A; \quad \dot{F}_2 = a_1 - j b_1.$$

Функция эквивалентной нелинейной системы, называемая также о п и с ы в а ю щ е й функцией, равна отношению комплексной амплитуды первой гармоники реакции к амплитуде входного сигнала:

$$\begin{aligned} H(j\omega, A) &= \frac{a_1 - j b_1}{A} = P(\omega, A) + j Q(\omega, A) = \\ &= M(\omega, A) e^{j\varphi(\omega, A)}, \end{aligned} \quad (8.37)$$

где  $P(\omega, A)$ ;  $Q(\omega, A)$  — вещественная и мнимая части, пропорциональные коэффициентам ряда при косинусе и синусе основной частоты;  $M(\omega, A)$ ;  $\varphi(\omega, A)$  — модуль и фазовый угол.

Наиболее характерное отличие функции нелинейной системы от функции линейной системы состоит в том, что она зависит не только от частоты, но также от амплитуды входного сигнала.

Для анализа нелинейных цепей и систем по методу гармонической линеаризации необходимо иметь выражения комплексных функций всех эквивалентных линейных элементов, входящих в систему. Характеристика нелинейного элемента, связывающая выходную и входную переменные, зависит от входного сигнала, а также его производной (или производных)

$$f_2(t) = \varphi(f_1, \dot{f}_1). \quad (8.38)$$

Подставив в это выражение величину  $f_1 = A \cos \omega t$ , получим в явном виде зависимость выходной периодической реакции от времени

$$f_2(t) = \varphi(A \cos \omega t; -\omega A \sin \omega t). \quad (8.39)$$

Комплексный коэффициент первой гармоники ряда Фурье, определяющий искомую функцию эквивалентной системы, можно вычислить по формуле ( $k = 1$ )

$$\dot{F}_2^{(1)} = a_1 - jb_1 = -\frac{2}{T} \int_0^T f_2(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{2}{T} F(s) \Big|_{s=jk\omega_1}, \quad (8.40)$$

где  $F(s)$  — изображение по Лапласу временной функции, совпадающей с  $f_2(t)$  в пределах  $0 < t < T$  и обращающейся в нуль при  $t > T = 2\pi/\omega_1$ .

Выражение  $\dot{F}_2$  через изображение по Лапласу позволяет часто при определении коэффициентов рядов Фурье избежать интегрирования, используя таблицы изображений и теоремы преобразования.

В частном случае, когда нелинейная характеристика выражена степенным полиномом, отпадает необходимость в вычислении коэффициентов ряда Фурье, так как выходная реакция при  $f_1 = A \cos \omega t$  будет представляться после преобразований сразу в виде тригонометрического полинома (см. § 2.3).

Рассмотрим примеры определения функций эквивалентной системы. Для простоты примем характеристику, т. е. связь между выходной и входной переменными, заданной функциональной зависимостью, не содержащей производных. Такую характеристику будет иметь нелинейная резистивная цепь. Начнем с характеристики, заданной степенным полиномом.

1. Нелинейная система имеет характеристику, заданную кубической зависимостью

$$f_2 = a_3 f_1^3. \quad (8.41)$$

При подаче на вход гармонического сигнала

$$f_1(t) = A \cos \omega t \quad (8.42)$$

на выходе цепи получим

$$f_2(t) = a_3 A^3 \cos^3 \omega t = \frac{3}{4} a_3 A^3 \cos \omega t + \frac{1}{4} a_3 A^3 \cos 3\omega t. \quad (8.43)$$

Выходная реакция содержит первую и третью гармоники, амплитуды которых, естественно, зависят от амплитуды входного сигнала. Отбросив третью гармонику, получим эквивалентную цепь гармонической линеаризации, выходная реак-

ция которой состоит только из первой гармоники реакции исходной цепи:

$$f_2^{(1)}(t) = \frac{3}{4} a_3 A^3 \cos \omega t. \quad (8.44)$$

Так как выходной сигнал приближенно принят гармоническим с той же частотой, что и входной сигнал, временные функции (8.42) и (8.44) можно представить комплексными амплитудами, которые равны вещественным амплитудам:  $\dot{F}_1 = A$ ;

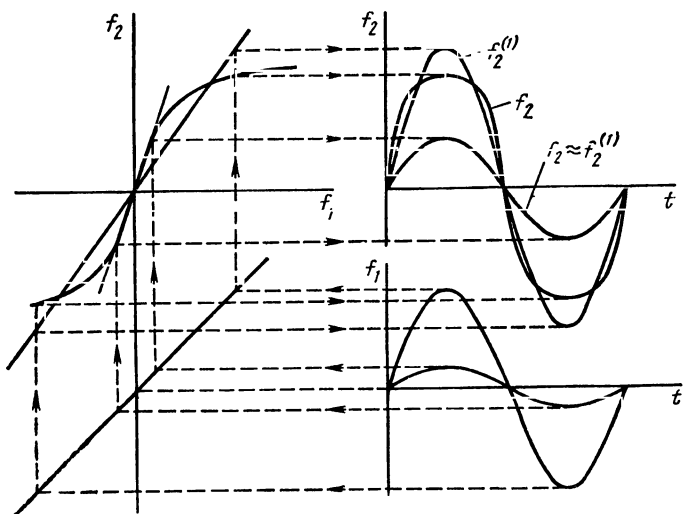


Рис. 8.3

$\dot{F}_2^{(1)} = \frac{3}{4} a_3 A^3$ . Начальные фазы функций равны нулю, так как цепь является резистивной, функция передачи будет также вещественной:

$$H(A) = \frac{\dot{F}_2^{(1)}}{\dot{F}_1} = \frac{3}{4} a_3 A^2. \quad (8.45)$$

На рис. 8.3 показаны характеристика элемента и графики выходной реакции и ее первых гармоник при двух различных амплитудах входного сигнала. Как видим, для первых гармоник характеристика линеаризуется, поскольку обе функции (входа и выхода) имеют одинаковую синусоидальную форму: действительная характеристика для мгновенных значений заменяется усредненной линейной характеристикой для первой гармоники. Отсюда следует название гармонической линеаризации.

2. Нелинейная система имеет идеальную релейную характеристику (рис. 8.4, а):

$$f_2 = \begin{cases} B & f_1 > 0; \\ -B & f_1 < 0. \end{cases}$$

При подаче на вход гармонического косинусоидального сигнала на выходе цепи получим прямоугольные колебания с постоянной амплитудой  $B$  (рис. 8.4, б). Амплитуда первой гармоники колебаний

$$a_1 = 4B/\pi.$$

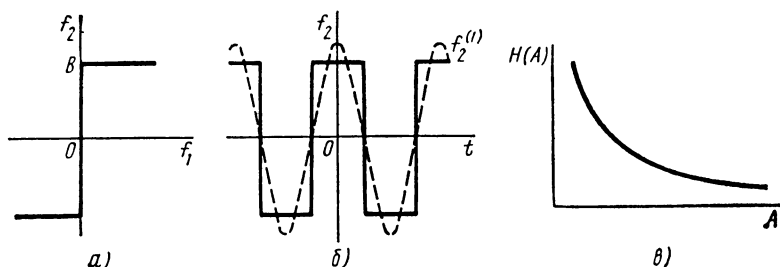


Рис. 84

Функцию эквивалентной нелинейной системы получим, разделив  $a_1$  на амплитуду входного сигнала:

$$H(A) = 4B/\pi A. \quad (8.46)$$

На рис. 8.4, в показана зависимость функции от амплитуды приложенного сигнала. Так как амплитуда первой гармоники на выходе неизменна, то при  $A \rightarrow \infty$   $H(A) \rightarrow 0$ .

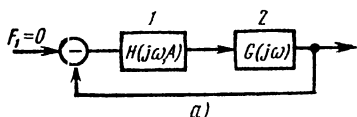
Функция эквивалентной системы с функциональной (алгебраической или трансцендентной) характеристикой, не содержащей производных, является, как видим, вещественной величиной, которая зависит только от амплитуды входного сигнала. Это связано с тем, что разложение в ряд Фурье выходной реакции при действии на входе косинусоидального сигнала состоит только из косинусных членов.

В следующем параграфе приведены примеры элементов более общего вида, реакции которых зависят не только от амплитуды воздействия, но также от производной.

Так как установившаяся реакция в цепи принята синусоидальной с частотой основной гармоники, анализ можно провести в частотной области аналогично анализу линейных цепей по методу комплексных амплитуд. Если имеются выражения

эквивалентных функций входного сопротивления двухполюсных элементов и функций передачи четырехполюсных элементов, то для определения результирующей входной или передаточной функции заданной цепи можно применить все приемы анализа, используемые в методе комплексных амплитуд.

По найденной результирующей функции нелинейной цепи, которая зависит от амплитуды входного сигнала и является отношением вида (8.37), можно найти комплексную амплитуду первой гармоники выходной реакции



$$\dot{F}_2^{(1)} = H(j\omega, A) \dot{F}_1. \quad (8.47)$$

С помощью метода гармонической линеаризации обычно анализируют систему с одним нелинейным элементом, соединенным с линейной частью, которая может иметь любой порядок.

Введение эквивалентных функций передачи позволяет применять некоторые линейные методы для приближенного анализа нелинейных систем.

Типичным примером подобного анализа является установление условий возникновения автоколебаний в нелинейных автономных системах с обратной связью.

На рис. 8.5, а изображена структурная схема системы одноконтурной обратной связи с нелинейным элементом (звеном). Нелинейное звено 1 характеризуется эквивалентной функцией передачи  $H(j\omega, A)$ , а включенное последовательно с ним линейное звено 2 — функцией передачи  $G(j\omega)$ .

Сигнал с выхода системы направляется по контуру обратной связи в точку суммирования, где он вычитается из входного сигнала, так что к звену 1 подается разность входного и выходного сигналов.

Установим условие, при выполнении которого в системе возможно появление автоколебаний. В отсутствие внешнего воздействия колебания могут возникнуть при нарушении устойчивости.

Устойчивость замкнутой системы обратной связи можно установить с помощью критерия Найквиста. Согласно этому критерию определяют функцию передачи разомкнутой системы, которая равна

$$W(j\omega, A) = H(j\omega, A)G(j\omega).$$

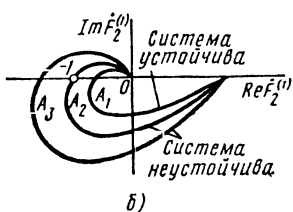


Рис. 8.5

Затем на комплексной плоскости строят годограф вектора  $W(j\omega, A)$  для заданного значения амплитуды  $A$  входного сигнала при изменении частоты от 0 до  $\infty$ . Система с замкнутой обратной связью устойчива, если годограф вектора устойчивой функции передачи разомкнутой системы не охватывает точку с координатами  $(-1; j0)$ , расположенную на вещественной отрицательной полуоси и на единичном расстоянии от начала координат. На рис. 8.5, б изображены годографы для  $W(j\omega, A)$  при различных амплитудах входного сигнала.

Условием появления в системе обратной связи почти гармонических колебаний является прохождение годографа передачи разомкнутой системы через точку  $(-1; j0)$ :

$$W(j\omega, A) = H(j\omega, A)G(j\omega) = -1. \quad (8.48)$$

Значения  $A$  и  $\omega$ , при которых выполняется это условие, представляют амплитуду и частоту колебаний в системе. К преимуществам метода гармонической линеаризации следует отнести: 1) возможность анализа систем высокого порядка, обусловленного линейной частью цепи; 2) простоту расчета, который формально аналогичен расчету линейных цепей по методу комплексных амплитуд; 3) возможность использования частотного метода логарифмических характеристик, частотного критерия устойчивости Найквиста и т. д.; 4) возможность анализа довольно сложных явлений и решения таких практически важных задач, как выявление автоколебаний и предельных циклов, установление устойчивости при действии малых и больших сигналов, установление скачкообразного резонанса в цепи и т. п.

Метод гармонической линеаризации широко применяется для анализа и проектирования различных систем, особенно систем с обратными связями. Анализируемая система должна удовлетворять указанным условиям. Из них обязательным является условие наличия периодического режима той же частоты, что и частота действующего на входе сигнала. Что касается условия фильтрации и подавления высших гармоник линейной частью, то оно, как показывает практика расчетов, может и не соблюдаться строго.

Для метода гармонической линеаризации, как и для большинства приближенных методов анализа, трудно указать допустимую область применения. Основной недостаток метода гармонической линеаризации и состоит в том, что во многих случаях ему невозможно дать строгое математическое обоснование. Это требует иногда проверки результатов расчетов с помощью аналоговых или физических моделей.



## § 8.5. Комплексные эквивалентные функции нелинейных элементов цепи

Рассмотрим простейшие примеры определения комплексных сопротивлений двухполюсных элементов и функций передачи четырехполюсных элементов.

Как было указано, для определения эквивалентной функции элемента цепи сначала необходимо найти реакцию, подставив в нелинейную характеристику значение входного сигнала  $f_1 = A \cos \omega t$ . Затем по формуле (8.40) вычисляют комплексную амплитуду первой гармоники разложения реакции в ряд Фурье, разделив которую на амплитуду  $A$  получают искомую функцию.

В настоящее время имеются таблицы эквивалентных функций нелинейных элементов систем с самыми различными характеристиками, включая сложные гистерезисные характеристики. Здесь приведем симметричные характеристики типичных нелинейных элементов со свойствами насыщения. Чтобы избежать вычисления интеграла (8.40), полагаем характеристики элементов приближенно представленными полиномами. Следует иметь в виду, что при конечной (обычно невысокой) степени полинома допустимые приближения реальных характеристик получаются только для определенного диапазона изменения переменных.

**Нелинейный резистивный двухполюсный элемент.** Зададимся симметричной характеристикой типа насыщения в виде нечетного двучлена

$$i = Gu + a_3 u^3.$$

Приняв напряжение на элементе синусоидальным  $u = U_m \cos \omega t$ , для тока получим

$$i = \left( GU_m + \frac{3}{4} a_3 U_m^3 \right) \cos \omega t + \frac{a_3}{4} U_m^3 \cos 3\omega t.$$

Отношение амплитуды первой гармоники тока к амплитуде входного напряжения представляет искомую эквивалентную входную проводимость нелинейного резистивного элемента

$$Y(U_m) = G + \frac{3}{4} a_3 U_m^2.$$

В выражение для  $Y$  не входит частота, но проводимость существенно зависит от амплитуды напряжения. Эта зависимость учитывает нелинейность характеристики, правда, приближенным — усредненным образом.

**Нелинейный резистивный трехполюсный элемент — триод.** Передаточные свойства триода определяются анодно-сеточными характеристиками, представляющими зависимости анодного тока от напряжения на сетке при заданном постоянном напряжении на диоде. Если пренебречь влиянием анодного напряжения, то для триода получим одну анодно-сеточную характеристику для некоторого среднего значения анодного напряжения. Пусть анодно-сеточная характеристика аппроксимирована нечетным полиномом третьей степени

$$i_a = Su - S_3 u^3.$$

Поставив сюда  $u = U_m \cos \omega t$ , для анодного тока получим

$$i_a = \left( S U_m - \frac{3}{4} S_3 U_m^3 \right) \cos \omega t - \frac{S_3 U_m^3}{4} \cos 3\omega t.$$

Эквивалентная передаточная функция триода

$$H(\dot{U}_m) = \frac{\dot{i}_a^{(1)}}{\dot{U}_m} = S - \frac{3}{4} S_3 U_m^2$$

уменьшается с увеличением напряжения на сетке, что связано с уменьшением крутизны характеристики.

**Нелинейный индуктивный элемент.** Найдем эквивалентное комплексное сопротивление индуктивной катушки с ферромагнитным сердечником. Пусть характеристика индуктивности в предположении не слишком большого насыщения представлена простейшим полиномом

$$\Psi = L (i - k i^3).$$

Напряжение на индуктивном элементе

$$u = \frac{d\Psi}{dt} = L \left( \frac{di}{dt} - 3k i^2 \frac{di}{dt} \right).$$

При синусоидальном токе в элементе производная тока также синусоидальна:

$$i = I_m \cos \omega t; \quad di/dt = -\omega I_m \sin \omega t.$$

Подставив эти величины в выражение напряжения, получим

$$\begin{aligned} u &= L (-\omega I_m \sin \omega t + \omega 3k I_m^3 \cos^2 \omega t \sin \omega t) = \\ &= \omega L I_m \left[ (-1 + 3k I_m^2/4) \sin \omega t + \frac{3}{4} k I_m^2 \sin 3\omega t \right]. \end{aligned}$$

Первая гармоника напряжения

$$u^{(1)} = \omega L \left( 1 - \frac{3}{4} k I_m^2 \right) \cos (\omega t + \pi/2).$$

Эквивалентное комплексное сопротивление индуктивного элемента

$$Z_L = \dot{U}_m^{(1)} / I_m = j\omega L \left( 1 - \frac{3}{4} k I_m^2 \right).$$

В отличие от резистивного элемента эквивалентное комплексное сопротивление индуктивного элемента зависит не только от амплитуды тока, но также от частоты. Кроме того, комплексное сопротивление  $Z_L$  имеет фазовый угол — первая гармоника напряжения на индуктивности опережает по фазе ток на  $90^\circ$ .

**Нелинейный емкостный элемент.** Рассмотрим нелинейный емкостный элемент с характеристикой типа насыщения. Примем представление характеристики нечетным двучленом в виде следующей зависимости напряжения от заряда:

$$u = (q + kq^3)/C.$$

Примем также заряд и ток в емкости синусоидальными:

$$q = Q \cos \omega t; \quad i = dq/dt = -\omega Q \sin \omega t = \omega Q \cos \times (\omega t - \pi/2).$$

Подставив значение заряда в выражение напряжения, имеем

$$u = \frac{Q}{C} \cos \omega t + \frac{kQ^3}{C} \cos^3 \omega t = \frac{Q}{C} (1 + 3kl^2/4\omega^2) \cos \omega t + \frac{kQ^3}{4C} \cos 3\omega t.$$

Эквивалентное комплексное сопротивление емкостного элемента

$$Z_C = \frac{1}{\omega C} \left( 1 + \frac{3kl^2}{4\omega^2} \right) e^{-j\pi/2}.$$

Здесь комплексное сопротивление зависит не только от амплитуды тока, но также от частоты. Фазовый угол сопротивления означает, что первая гармоника напряжения на емкости отстает по фазе от тока на  $90^\circ$ .

## § 8.6. Нелинейный колебательный контур

В качестве примера применения метода гармонической линеаризации рассмотрим цепь, состоящую из последовательно соединенных индуктивного, резистивного и емкостного элементов, подключенную к источнику синусоидального напряжения. Один из реактивных элементов цепи, например индук-

тивность, примем нелинейным. Будем интересоваться установившимся периодическим режимом в цепи с малыми потерями при действии источника синусоидального напряжения, частота которого близка к средней резонансной частоте.

Пренебрежем высшими гармониками и будем учитывать только основную гармонику, частота которой равна частоте приложенного напряжения. В силу частотно-избирательных свойств контура такое рассмотрение вполне допустимо. Следовательно, анализ можно провести с помощью частотного

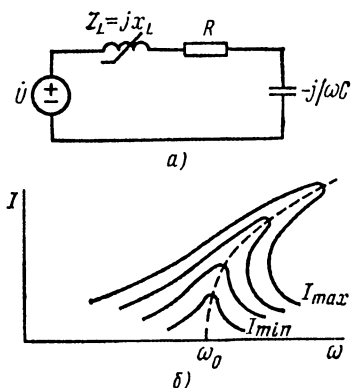


Рис. 8.6

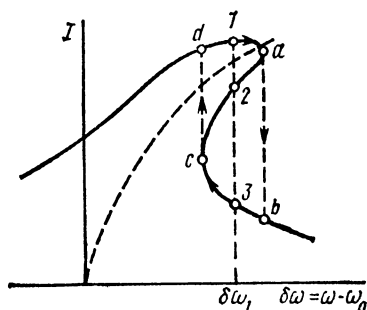


Рис. 8.7

метода, приняв схему замещения в частотной области (рис. 8.6, а). Уравнение равновесия напряжений

$$Z_L I_m + R I_m + \frac{1}{j\omega C} I_m = Z(j\omega, I_m) I_m = \dot{U}_m.$$

Эквивалентное комплексное сопротивление в соответствии с § 8.5 примем равным

$$Z_L = j\omega L (1 - k_1 I^2).$$

Комплексное сопротивление гармонической линеаризации, определяющее амплитуду первой гармоники,

$$Z(j\omega, I) = R + j \left[ \omega L (1 - k_1 I^2) - \frac{1}{\omega C} \right].$$

Удобно перейти к нормированным величинам сопротивления и частоты

$$Z_* = Z/R; \quad \omega_* = \omega/\omega_0,$$

где  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  — резонансная частота на линейном участке характеристики (при малых токах).

После подстановки значений  $Z = RZ_*$  и  $\omega = \omega_0\omega_*$  в выражение комплексного сопротивления получим следующее нормированное значение:

$$Z_* = 1 + jQ [\omega_* (1 - k_1 I^2) - 1/\omega_*],$$

где  $Q = \omega_0 L/R$  — добротность контура на линейном участке характеристики индуктивности. Поставим задачу построения амплитудно-частотной характеристики (резонансной кривой), т. е. зависимости тока первой гармоники от частоты. Для этого запишем выражение модуля тока:

$$I = |Y| U = |Y_*| \frac{1}{R} U = \frac{U}{R} \left\{ 1 + Q^2 \left[ \omega_* (1 - k_1 I^2) - \frac{1}{\omega_*} \right]^2 \right\}^{-1/2}$$

Выражение получается сложным, так как в правую часть входит ток, зависящий от проводимости цепи:  $I = |Y|U$ . При малых значениях тока влиянием  $k_1 I$  можно пренебречь — получим обычную кривую резонансную линейного контура (рис. 8.6, б, кривая  $I_{\min}$ ). Увеличение тока искажает частотную характеристику: резонансные кривые получают наклон в сторону более высоких частот. Чем больше напряжение, тем сильнее этот наклон и больше ток. После максимума уменьшению тока соответствует уменьшение частоты — получается падающий участок частотной характеристики (рис. 8.7), на котором при заданной частоте имеются три точки равновесия 1, 2 и 3 с тремя возможными значениями тока. Точка 2 является неустойчивой. Поэтому если постепенно увеличивать частоту, то рабочая точка после прохождения максимума из положения *a* скачком по вертикальной линии перейдет в положение *b*. При уменьшении частоты рабочая точка из положения *c* скачком по вертикальной линии перейдет в положение *d*. Путь перемещения рабочей точки отмечен стрелками. Скачкообразным переходам рабочей точки соответствуют скачкообразные изменения тока в контуре.

Перейдем теперь к исследованию зависимости между напряжением и током в контуре при постоянной частоте входного сигнала. Эту зависимость можно получить также из выражения эквивалентного входного сопротивления. Но в целях наглядности ограничимся качественным построением для случая нулевого активного сопротивления в контуре. Уравнение равновесия для первых гармоник напряжений на индуктивном и емкостном элементах, сдвинутых по фазе на  $180^\circ$ , запишем в виде  $\dot{U} = \dot{U}_L + \dot{U}_C$ .

На рис. 8.8, *a* построены кривые линейно зависящего от тока напряжения на емкости и нелинейно зависящего от тока напряжения на индуктивности. Величина результирующего напряжения на контуре получена как разность этих напряжений:  $U = |U_L - U_C|$ . При значении тока  $I_0$  напряжения на обоих элементах одинаковы по величине и напряжение на контуре равно нулю. Здесь имеет место резонанс или, как говорят, феррорезонанс. В отличие от линейного контура резонанс в нелинейном контуре, как видно, можно получить изме-

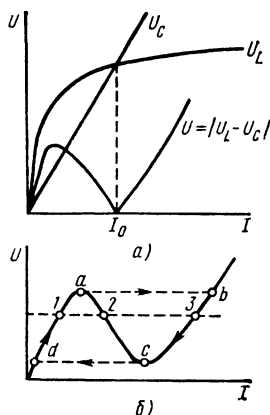


Рис. 8.8

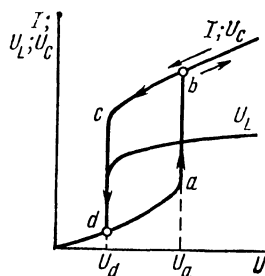


Рис. 8.9

нением значения тока. При учете потерь следует добавить напряжение на резистивном элементе, сдвинутое по фазе на  $90^\circ$ . В результате напряжение на контуре приобретет форму, показанную на рис. 8.8, *б*. Характерным для полученных эквивалентных вольт-амперных характеристик контура является наличие падающего участка. При питании контура от источника синусоидального напряжения возможны три точки равновесия: 1, 2 и 3, из них точка 2 на падающем участке является неустойчивой. Поэтому в контуре возможны скачки. На рис. 8.8, *б* стрелками показан путь перемещения рабочей точки. При плавном повышении напряжения рабочая точка из положения *a* скачком по горизонтальной линии попадает в положение *b*; при этом ток и напряжения  $U_C$  и  $U_L$  в контуре скачком увеличиваются (рис. 8.9). При снижении напряжения рабочая точка, двигаясь сначала по второй нарастающей ветви, из положения *c* (точки резонанса) скачком по горизонтальной линии перейдет в точку *d*, вызвав скачкообразные уменьшения тока, а также напряжений  $U_C$  и  $U_L$ .

## ГЛАВА 9

### ПРИМЕНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

#### § 9.1. Общие замечания

Нелинейные динамические цепи очень широко применяются в различных областях электротехники и радиоэлектроники. Невозможно дать даже краткий обзор всех их применений. В этой главе рассмотрим лишь небольшое число примеров нелинейных цепей первого и второго порядков, широко используемых на практике, которые можно условно разбить на два класса.

1. Неавтономные цепи — цепи, находящиеся под воздействием внешнего периодического, в основном синусоидального, сигнала. Искомой реакцией здесь является вынужденная, также периодическая реакция. Такие цепи служат главным образом для формирования из синусоидального сигнала периодического сигнала другой формы и частоты, т. е. для преобразования формы и спектра входного воздействия.

2. Автономные цепи — цепи без внешнего воздействия, за исключением возможных действий управляющих или пусковых импульсов, не влияющих на форму выходного сигнала, которая определяется только характеристиками и свойствами элементов цепи. Такие цепи включают в себя множество разнообразных автоколебательных систем — генераторов колебаний различной формы, в которых могут возникнуть самостоятельно незатухающие колебания, т. е. периодические изменения токов и напряжений. В автоколебательных системах происходит преобразование энергии источников постоянного тока (обычно) в энергию генерируемых колебаний. Форма, частота и амплитуда колебаний определяются структурой и параметрами цепи.

Из класса неавтономных цепей рассмотрим простейшую диодную  $RC$ -схему первого порядка, которая находит различные применения как выпрямительная схема с емкостным фильтром, схема для измерения амплитудных значений напряжений, фиксации максимального и минимального уровней сигнала, детектирования амплитудно-модулированных колебаний и т. д.

Из класса автономных цепей приведем переключаемые и автоколебательные системы первого и второго порядков: триггеры, мультивибраторы и генератор высокочастотных синусоидальных колебаний. При этом будут изложены лишь общие

принципы работы схем, иллюстрирующие некоторые теоретические положения. Разбор огромного числа различных схемных решений и их расчет не входят в нашу задачу.

Автоколебательные системы первого порядка для общности рассматриваются на единой основе перемещения рабочей точки по характеристике резистивной подцепи, имеющей падающий участок с отрицательным динамическим сопротивлением. Путь перемещения рабочей точки легко устанавливается на основе качественных соображений (см. гл. 7). Что касается генератора синусоидальных колебаний, содержащего два запаасающих энергии элемента и описываемого уравнением второго порядка, то его удобно рассматривать как систему с обратной связью.

## § 9.2. Диодная RC-схема

Рассмотрим простейшую диодную схему (рис. 9.1, а), состоящую из диода, соединенного последовательно с параллельным контуром, включающим емкость и резистор.

Произведем сначала анализ цепи с целью определения формы напряжения на емкости при действии на входе синусоидального напряжения

$$u_0(t) = U_m \sin \omega t.$$

Пренебрежем для простоты падением напряжения на диоде в прямом направлении и обратным током, т. е. примем характеристику диода идеальной, состоящей из двух взаимно перпендикулярных линейных участков, направленных по отрицательной и положительной полуосям  $u, i$ . Принятое допущение, являясь вполне приемлемым, существенно упрощает анализ, который целесообразно проводить с помощью кусочно-линейного метода.

Очевидно, начиная с момента времени  $t=0$  до некоторого момента  $t_1$  диод открыт ( $u_d > 0$ ), так что напряжение на выходе равно напряжению источника (рис. 9.1, б)

$$u_2(t) = u_0(t) = U_m \sin \omega t \quad (0 \leq t \leq t_1).$$

Здесь  $t_1$  — момент времени, когда ток через диод, постепенно уменьшаясь, принимает нулевое значение и происходит раз-

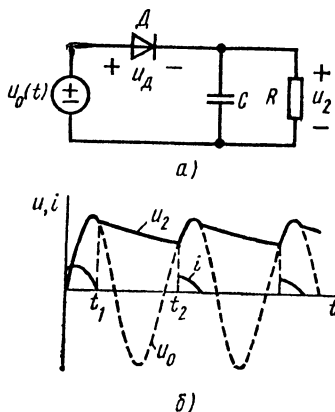


Рис. 9.1



мыкание диода, т. е. переход на горизонтальный участок характеристики  $i = 0$  ( $u_d < 0$ ).

Определение моментов перехода рабочей точки через точку излома, где сопрягаются два линейных участка характеристики, и представляет наиболее сложную часть анализа. Чтобы найти значение  $t_1$ , запишем выражение тока через диод, как сумму токов через сопротивление нагрузки и емкость:

$$i = i_R + i_C = \frac{1}{R} u_0(t) + C \frac{du_0(t)}{dt} = U_m \left( \frac{1}{R} \sin \omega t + \right. \\ \left. + \omega C \cos \omega_0 t \right) = U_m \sqrt{\omega^2 C^2 + 1/R^2} \cos(\omega t + \alpha_i),$$

где  $\alpha_i = \arctg(\omega CR)$ .

Ток обратится в нуль при  $\omega t_1 + \alpha_i = 0$  или при

$$t_1 = -\frac{1}{\omega} \alpha_i = -\frac{1}{\omega} \arctg(\omega CR).$$

При  $t = t_1$  сопротивление диода станет бесконечно большим и источник окажется отключенным от емкости и сопротивления нагрузки. Напряжение на емкости, равное в этот момент

$$u_2(t_1) = U_m \sin \omega t_1,$$

начнет затем спадать по экспоненте

$$u_2(t) = U_m \sin \omega t_1 e^{-(t-t_1)/\tau},$$

где  $\tau = RC$  — постоянная времени цепи.

Напряжение на диоде, равное разности напряжения источника и напряжения на емкости, будет отрицательным

$$u_d = u_0(t) - u_2(t) < 0 \quad (t_1 < t < t_2)$$

до момента  $t_2$ , когда нарастающая положительная полуволна напряжения источника не сравняется с напряжением на емкости:

$$u_2(t_2) = U_m \sin \omega t_1 e^{-(t_2-t_1)/\tau} = U_m \sin \omega t_2.$$

Для определения момента времени  $t_2$  необходимо решить это трансцендентное уравнение. Решение можно получить только в численном виде с помощью методов последовательного уточнения (см. § 2.7). На рис. 9.1, б приведены графики напряжения источника (пунктирная кривая) и напряжения на емкости, а также тока диода

Характерное свойство цепей с идеальными диодами и емкостями состоит в том, что почти сразу после первого периода устанавливается стационарный режим. Это свойство связано

с односторонней проводимостью диода — емкость не может разряжаться на источник. Спад напряжения на емкости в интервале  $t_2 - t_1$  закрытого состояния диода определяется экспонентой  $\exp - (t - t_1)/\tau$ . При небольших спадах напряжения интервал закрытого состояния диода почти равен  $t_2 - t_1 \approx T_2$ , т. е. периоду выпрямленного напряжения. Уменьшить спад при заданном сопротивлении нагрузки можно, снижая величину  $T_2/\tau$ , т. е. повышая частоту источника питания и увеличивая емкость при заданном сопротивлении нагрузки.

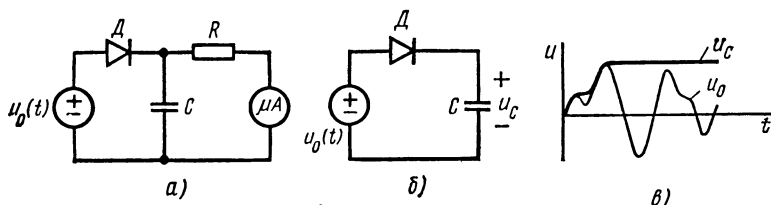


Рис. 9.2

Перейдем к рассмотрению примеров применений цепи.

**Амплитудный вольтметр.** Если постоянную времени  $RC$ -цепи сделать очень большой за счет увеличения сопротивления, то пульсации напряжения можно уменьшить до такой величины, при которой на емкости будет практически постоянное напряжение, равное амплитудному значению положительной полуволны (или отрицательной полуволны — при переключении диода) приложенного к цепи переменного напряжения. Значение этого напряжения может быть измерено вольтметром постоянного тока с большим входным сопротивлением (магнитоэлектрической или электростатической системы). Вольтметр первого вида состоит из высокочувствительного микроамперметра, соединенного последовательно с высокоомным сопротивлением (рис. 9.2, а). Постоянная времени все же должна быть конечной, чтобы стрелка прибора могла без большого запаздывания следовать за относительно медленными изменениями измеряемого напряжения. Амплитудный вольтметр применяется также для измерения амплитуды повторных импульсных сигналов.

**Фиксатор максимального и минимального уровней напряжения.** При  $R \rightarrow \infty$  получим схему заряда емкости через диод (рис. 9.2, б). Поскольку ток диода, равный току в емкости, проходит только в одном направлении, например положительном ( $i \geq 0$ ), напряжение на емкости может изменяться только

монотонно — нарастать по величине; производная напряжения не принимает отрицательных значений:

$$i = C \frac{du_C}{dt} \geq 0.$$

При воздействии в течение некоторого интервала времени входного переменного сигнала напряжение на емкости изменяется так, как показано на рис. 9.2, в. Как видим, емкость фиксирует наибольший максимум или наименьший минимум (при переключении диода) входного напряжения.

В случае синусоидального входного сигнала после первого полупериода на емкости установится постоянное напряжение (рис. 9.3, а). Напряжение на диоде, равное разности входного и выходного напряжений, имеет пульсирующий характер — его значение изменяется от нуля до удвоенной амплитуды входного сигнала (рис. 9.3, б). На диоде происходит автоматическое смещение входного напряжения — при любом его уровне смещение, приводящее к указанной пульсации, сохраняется. Если необходимо иметь пульсирующее напряжение по отношению к заземленной точке, то диод, с которого снимается напряжение, следует включить на выходе цепи.

**Выпрямитель.** Диодная  $RC$ -цепь применяется часто как простейший выпрямитель со сглаживанием пульсаций выпрямленного напряжения. Емкость служит в качестве сглаживающего фильтра нижних частот, уменьшающего гармоники переменной составляющей напряжения на нагрузке. Величину емкости выбирают из условия обеспечения заданного спада напряжения  $\Delta u$ , который приближенно можно представить при замене экспоненты линейным членом разложения в степенной ряд следующим образом:

$$\Delta u = U_m (1 - e^{-T_2/\tau}) \approx U_m T_2/\tau = U_m T_2/RC.$$

Отсюда

$$C \geq \frac{T_2}{R} \cdot \frac{1}{(\Delta u/U_m)_{\text{доп}}}.$$

При заданных допустимом размахе пульсаций и сопротивлении нагрузки емкость фильтра определяется периодом выпрямленного напряжения, который равен  $T_2 = T$  (при однополупериодном выпрямлении) и  $T_2 = T/2$  (при двухполупериодном выпрямлении), где  $T$  — период переменного напряжения на входе. В случае многофазной системы с числом фаз  $m$   $T_2 = T/m$ .

Для получения приемлемой небольшой емкости фильтра следует применять двухполупериодную или многофазную

схему выпрямления, а также, если это возможно, источник повышенной частоты. Основной элемент выпрямительных схем — диод — нужно выбирать по допустимым значениям среднего и амплитудного значений тока и амплитудному значению обратного напряжения, падающего на диоде в закрытом состоянии. В однополупериодной схеме, как было показано,  $U_{обр} = 2U_m$ ; в мостовой схеме  $U_{обр} = U_m$ .

**Детектор амплитудно-модулированных колебаний.** Детектированием называют процесс, обратный модуляции. Если при амплитудной модуляции информация вносилась в колебание высокой частоты в виде огибающей, то при детектировании необходимо выделить огибающую, содержащую информацию, удалив высокочастотное за-

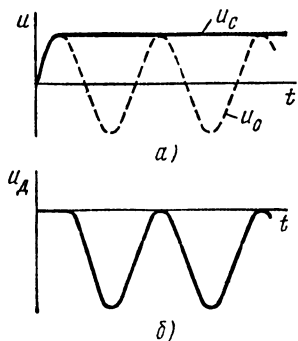


Рис 9.3

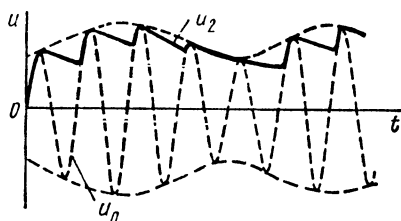


Рис. 9.4

полнение. Следовательно, схема детектора должна при действии на входе амплитудно-модулированного колебания высокой частоты  $u = A(t) \cos \omega t$  выдать на выходе сигнал низкой частоты  $u_2 = KA(t)$ .

С частотной точки зрения сигнал, имеющий линии спектра  $\omega$  и  $\omega \pm k\Omega$  в высокочастотной области, необходимо преобразовать в сигнал с новыми линиями спектра  $\pm k\Omega$ . Подобное преобразование, как известно, выполнимо только с помощью нелинейной цепи (или цепи с переменными параметрами). Если сигнал, состоящий из суммы колебаний несущей частоты и одной боковой частоты, действует на цепь с квадратичной характеристикой, то наряду с гармониками возникает комбинационная частота  $\Omega$ , которую следует выделить фильтром нижних частот.

В качестве детектора можно применять диодную  $RC$ -схему при соответствующем выборе постоянной времени: диод является нелинейным элементом, а  $RC$ -цепь — фильтром нижних частот. Работу этой схемы удобно рассматривать во временной

области с точки зрения разобранных процессов зарядки и разрядки емкости.

На рис. 9.4 пунктирная кривая изображает действующий на входе цепи амплитудно-модулированный сигнал. Прежде всего, очевидно, отрицательные полуволны колебаний не пройдут через диод. Из положительных полуволн, пропускаемых диодом, следует выделить огибающую, содержащую информацию. Эту задачу и решает  $RC$ -цепь. В случае идеального диода емкость зарядится до амплитуды первой положительной полуволны напряжения, затем диод закроется и начнется разрядка емкости по экспоненте до момента открытия диода следующей положительной полуволной. После нового подзаряда емкость снова начнет разряжаться и т. д. На рис. 9.4 сплошной линией показано изменение напряжения на емкости, которое зависит от постоянной времени контура. Величина последней должна обеспечивать, во-первых, достаточную равномерность кривой напряжения, для чего требуется довольно большая величина  $\tau$ , и, во-вторых, кривую напряжения на емкости, успевающую за наиболее быстрыми спадами огибающей: для этого необходимо, чтобы касательная к экспоненте разрядки емкости была более крутой, чем касательная к огибающей в той же точке. Постоянная времени должна быть значительно больше периода несущих колебаний и значительно меньше минимального периода модулирующих колебаний:

$$2\pi/\Omega_{\max} \gg \tau \gg 2\pi/\omega.$$

Вместо диода в качестве нелинейного элемента часто применяют транзистор, включенный по схеме с общим эмиттером, или триод.  $RC$ -цепь включается между коллектором и эмиттером или анодом и катодом. Выпрямление производится  $p$ - $n$ -переходом слоев базы и эмиттера или промежуток сетка—катод.

### § 9.3. Триггеры

Триггером называют нелинейную переключаемую цепь типа реле с двумя состояниями устойчивого равновесия. В любой момент цепь может находиться только в одном из этих состояний. Цепь обычно имеет два входа и два выхода, соответствующих двум состояниям устойчивого равновесия. Переход из одного состояния равновесия в другое производится подачей на вход короткого управляющего импульса, приводящего к скачкообразному установлению высокого уровня напряжения на одном из выходов и низкого уровня — на другом. Подача следующего управляющего импульса так же

скачком устанавливает низкий уровень напряжения на первом выходе и высокий — на втором. Уровни сигналов на обоих выходах, как видим, всегда противоположны.

Триггеры широко применяются в ЦВМ в качестве двоичных запоминающих элементов (определенное состояние одного из выходов принимается за информационную 1, а противоположное — за 0), пересчетных устройств и т. д. Триггеры служат также для формирования из управляющих импульсов или синусоидальных колебаний прямоугольных импульсов.

Существуют различные схемы триггеров, выполненных преимущественно в виде транзисторных и триодных двухкаскадных  $RC$ -усилителей с положительной обратной связью. В нашу задачу не входит рассмотрение различных схем триггеров, ограничимся лишь кратким изложением общих принципов, лежащих в основе их работы.

Триггерные схемы можно рассматривать как нелинейную цепь первого порядка, которая состоит из одного линейного элемента, запаасающего энергию (индуктивного или емкостного), и нелинейной резистивной подцепи с падающим участком характеристики. Применяемые на практике резистивные элементы (туннельные диоды, тиристоры и газоразрядные лампы) имеют один падающий участок характеристики. Используемый в триггерах двухкаскадный усилитель на транзисторах или триодах с положительной обратной связью можно также рассматривать со стороны выводов выхода как резистивный двухполюсник с падающим участком характеристики.

Перейдем к обоснованию схемы триггера, которую условимся рассматривать как нелинейную цепь первого порядка с двумя устойчивыми состояниями равновесия. На основе качественных соображений о процессах в цепях первого порядка (см. § 7.3) для получения двух устойчивых точек равновесия необходимо выполнить следующие условия.

1. Если запаасающим энергию элементом является индуктивность, то входная вольт-амперная характеристика резистивной подцепи должна быть типа  $S$ , управляемой током. Состояние равновесия при этом соответствует равенству нулю напряжения на индуктивном элементе:  $u_L = Li'(t) = 0$ , т. е. на входе резистивной подцепи. Следовательно, *точками равновесия являются точки пересечения характеристики резистивной подцепи, включая источники смещения, с осью  $i$* . Очевидно, для рассматриваемой характеристики получим три точки, из которых две крайние устойчивы, а средняя, расположенная на падающем участке, — неустойчива.

2. Если запаасающим энергию элементом является емкость, то входная вольт-амперная характеристика резистивной под-

цепи должна быть типа  $N$ , управляемой напряжением. Состояние равновесия в этом случае соответствует равенству нулю тока в емкостном элементе:  $i_C = C u'(t) = 0$ , т. е. на входе резистивной подцепи. Точками равновесия являются точки пересечения характеристики резистивной подцепи с осью  $u$ . Для подобной характеристики возможны также три точки равновесия, из которых две крайние устойчивы, а средняя — неустойчива.

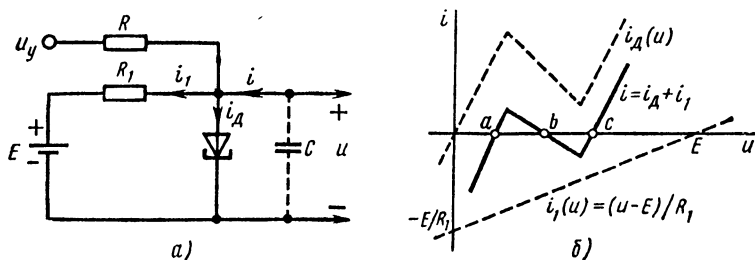


Рис. 9.5

Рассмотрим простейшую схему триггера на туннельном диоде, имеющем характеристику типа  $N$ . Элементом, запасающим энергию, здесь должна быть емкость. На рис. 9.5,  $a$  показана схема триггера на туннельном диоде с цепью смещения из источника постоянного напряжения  $E$  и последовательно включенного резистора  $R_1$ . На рис. 9.5,  $b$  изображены характеристики диода и цепи смещения  $i_1(u) = (u - E)/R_1$  в виде прямой, а также результирующая характеристика. Параметры цепи смещения выбирают из соображений, чтобы устойчивые точки равновесия располагались в экстремумах характеристики туннельного диода с целью снижения амплитуды управляющего импульса. Чтобы вывести цепь из состояния равновесия, следует подать отрицательный управляющий импульс тока, под действием которого результирующая характеристика снизится и займет положение, показанное на рис. 9.6,  $a$  нижней пунктирной линией. При этом рабочая точка из положения  $a$  скачком по горизонтальной линии перейдет в положение  $c'$ . После прохождения пускового импульса рабочая точка попадет в устойчивое положение  $c$ . При таком переходе выходное напряжение скачком получит высокий уровень (рис. 9.6,  $b$ ). На кривой  $u(t)$  нанесены буквами соответствующие точки характеристики, приведенной на рис. 9.6,  $a$ . Для обратного перехода в первую точку необходимо подать положительный управляющий импульс тока, который подни-

мет характеристику до того положения, когда нарушится устойчивость точки равновесия на правой ветви. Если управляющим источником является источник напряжения, то его следует включать через резистор  $\bar{R}$  с достаточным значением сопротивления.

Емкость, запасаящая энергию, показана на рис. 9.5, *a* пунктиром — ее роль выполняет паразитная емкость диода. Дело в том, что для быстроты переходов желательно иметь минимальную величину емкости.

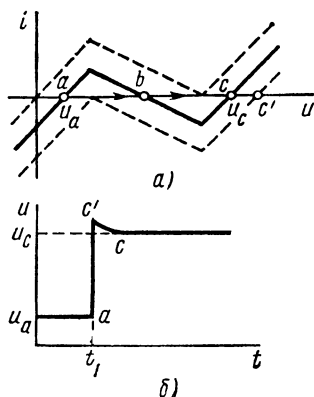


Рис. 9.6

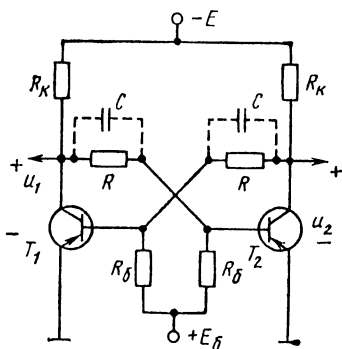


Рис. 9.7

На практике широко применяется схема триггера с двумя транзисторами (рис. 9.7), которую рассматривают как двухкаскадный усилитель с положительной обратной связью. Схема состоит из *p-n-p*-транзисторов с одинаковыми сопротивлениями коллекторной нагрузки  $R_K$ , и цепи смещения баз  $\bar{R}_B$  и ветвей обратной связи  $R$ . Перекрестная обратная связь каскадов осуществляется через резистивный делитель напряжения из сопротивлений  $R$  и  $R_\delta$ . Как видно из схемы, результирующее напряжение базы каждого транзистора равно разности между запирающим положительным по отношению к общему эмиттеру напряжением смещения  $E_{см}$  и отрицательным напряжением  $\beta U_K$  коллектора другого транзистора, поданным через делитель

$$U_6 = E_{см} - \beta U_K,$$

где  $\beta = R_\delta / (R_\delta + R)$  — коэффициент передачи делителя.

Примем состояние, когда открыт (насыщен) транзистор  $T_1$ . При открытом состоянии транзистора  $T_1$  напряжение его кол-



лктора  $U_{к1} \approx 0$  и напряжение базы транзистора  $T_2$   $U_{б1} \approx E_{см}$  должно обеспечить нулевой ток базы и состояние отсечки (запираия) транзистора  $T_2$ . Напряжение его коллектора при этом  $U_{к} \approx -E$  и соответствующее напряжение базы транзистора  $T_1$ :  $U_{б1} \approx E_{см} - \beta E$  должно обеспечивать ток базы, достаточный для сохранения состояния насыщения, в котором находился транзистор  $T_1$ . Следовательно, принятое открытое состояние транзистора  $T_1$  обязательно приводит к запертому состоянию транзистора  $T_2$ . Состояние это является устойчивым; вывести из него схему можно только приложив внешний пусковой сигнал.

Так как схема симметрична, то аналогичными рассуждениями можно показать, что принятие открытого (насыщенного) состояния транзистора  $T_2$  с  $U_{к2} \approx 0$  приводит непременно к запертому состоянию транзистора  $T_1$ , поскольку напряжение его базы  $U_{б1} \approx E_{см}$ . Так как  $U_{к1} \approx -E$ , то напряжение  $U_{б2}$  базы транзистора  $T_2$  поддерживает его открытое или насыщенное состояние, которое также будет устойчивым.

При переходах схемы триггера из одного устойчивого состояния в другое, происходящего под действием внешнего пускового сигнала в виде короткого импульса, транзисторы работают в нелинейном ключевом режиме, принимая состояния насыщения и отсечки коллекторных токов.

Схему триггера (рис. 9.7) можно рассматривать как пару транзисторных ключей, управляемых взаимно коллекторными напряжениями так, что открытие (закрытие) одного из них приводит к запираию (открытию) другого.

Из изложенного следует, что оба транзистора не могут одновременно находиться в состояниях отсечки (запираия) и насыщения. Оба эти состояния являются устойчивыми. При переходе схемы из одного состояния в другое в некоторый момент оба транзистора могут оказаться в проводящем активном режиме с токами  $I_{к1}$ ,  $I_{к2}$ . Но этот режим является неустойчивым: достаточно из-за флуктуаций одному из токов, например  $I_{к1}$ , получить приращение  $\Delta I_{к1}$ , как получит положительное приращение  $\Delta U_{к1}$  напряжение коллектора  $T_1$ , которое в свою очередь, увеличивая смещение базы  $T_2$ , уменьшит его ток  $I_{к2}$ ; следующее за этим уменьшение напряжения  $U_{к2}$  приведет к дальнейшему увеличению  $I_{к1}$  и соответственно к открытию  $T_1$  и закрытию  $T_2$ . Неустойчивый процесс переключения схемы происходит очень быстро, скачкообразно.

Для обеспечения правильного деления напряжения в быстром процессе параллельно сопротивлениям  $R$  включают емкости  $C$ , образующие с емкостью базы на землю емкостный делитель

Переключение схемы из одного состояния в другое производят подачей кратковременного отрицательного импульса на базы транзисторов. Выходами схемы являются коллекторы  $T_1$  и  $T_2$ , имеющие в определенный момент напряжения различных уровней.

Преимущество схемы состоит в том, что она имеет отдельные два выхода — коллекторы транзисторов и два входа — базы, на которые подаются управляющие импульсы одинаковой полярности.

#### § 9.4. Общая характеристика автоколебательных цепей

Диссипативная, т. е. обладающая потерями, цепь или система называется автоколебательной, если в ней при отсутствии приложенного внешнего периодического воздействия возникают незатухающие колебания (автоколебания). К автоколебательным системам относятся широко применяемые на практике генераторы колебаний различной формы, в том числе генераторы гармонических колебаний в очень широком диапазоне частот — от малых долей герца до сотен гигагерц ( $1 \text{ ГГц} = 10^9 \text{ Гц}$ ). Генератор колебаний является одним из основных элементов очень важных устройств радиотехники и электроники.

Как было отмечено в § 6.4, в динамических цепях без потерь, т. е. консервативных системах, при отсутствии внешнего воздействия также устанавливаются незатухающие колебания, представляющие собственные или свободные колебания. Частота этих колебаний зависит от параметров цепи, а амплитуда полностью определяется начальными условиями — амплитуда тем больше, чем больше запасенная в реактивных элементах начальная полная энергия, количество которой в процессе колебаний остается неизменной. В автоколебательных же системах получается иная картина: *амплитуда установившихся колебаний не зависит от начальных условий* — при изменении начального запаса энергии в довольно широкой области значений амплитуда остается неизменной. Величина амплитуды определяется характеристиками и параметрами элементов системы.

В установившемся режиме автоколебаний потери энергии за период в резистивных элементах схемы, включая нагрузку, должны в точности равняться средней или активной мощности, поступающей от источника энергии. Следовательно, первой неотъемлемой частью автоколебательной цепи является источник напряжения или тока, компенсирующий потери. В ав-

токолебательных устройствах происходит преобразование энергии источника (обычно источника постоянного напряжения) в энергию колебательного процесса.

Второй важнейшей частью автоколебательной цепи является активный нелинейный элемент. Обычно применяют резистивный элемент в виде двухполюсника с падающим участком вольт-амперной характеристики, т. е. отрицательным динамическим сопротивлением, или в виде трехполюсника с достаточной для требуемого усиления крутизной передаточной характеристики. Нелинейный элемент обуславливает неустойчивость состояния равновесия, которая приводит к самовозбуждению колебаний и, кроме того, к стабилизации амплитуды стационарных колебаний. При этом нелинейный элемент обеспечивает подачу в каждом периоде энергии от источника в цепь для компенсации потерь.

Третья составная часть автоколебательной цепи состоит из элементов, запасующих энергию, которые во многом определяют период, а также форму колебаний.

Наиболее широко применяемые в радиоэлектронике автоколебательные системы или генераторы колебаний можно подразделить на два класса: 1) генераторы синусоидальных колебаний; 2) генераторы колебаний несинусоидальной формы или разрывных релаксационных колебаний.

Колебательные процессы в генераторах колебаний обоих типов удобно рассматривать, условно подразделяя их на два типа: 1) генераторы с нелинейным резистивным активным двухполюсником, характеристика которого имеет падающий участок и может быть отнесена к  $N$ - или  $S$ -типу; предполагается, что отрицательное динамическое сопротивление спадающего участка, компенсируя положительное сопротивление, обусловленное потерями, может привести к неустойчивости — самовозбуждению и последующему поддержанию колебаний;

2) генераторы с нелинейным активным четырех- или трехполюсным элементом, выполняющим роль усилителя мощности, с применением обратной связи выхода усилителя с входом. При этом в области рабочих частот должна применяться достаточно сильная положительная обратная связь, приводящая к нарастающей раскатке колебаний, т. е. к неустойчивости и самовозбуждению.

Приведем *основное соотношение для линеаризованной системы с одноконтурной обратной связью*. На рис. 9.8, а изображена функциональная схема прохождения синусоидального сигнала. Применяется метод комплексных амплитуд в предположении введения гармонической линеаризации и эквивалентных функций передачи нелинейных элементов. На схеме:

$\dot{F}_1$  — комплексная амплитуда приложенного к системе внешнего сигнала;  $\dot{F}_2$  — комплексная амплитуда сигнала на выходе; 1 — функциональный блок с направленной передачей сигнала от входа к выходу и функцией  $A(j\omega)$ ; 2 — блок обратной связи с функцией передачи  $\beta(j\omega)$ ; 3 — точка суммирования, где происходит смещение (суммирование) сигнала  $\dot{F}_1$  и сигнала  $\dot{F}_\beta = \beta\dot{F}_2$ , переданного от выхода системы к ее входу по блоку 2. На входе блока 1 имеем сигнал, равный сумме  $\dot{F} = \dot{F}_1 + \dot{F}_\beta = \dot{F}_1 + \beta\dot{F}_2$ , так что  $\dot{F}_2 = (\dot{F}_1 + \beta\dot{F}_2)A$ . Отсюда функция передачи системы с обратной связью

$$H(j\omega) = \dot{F}_2/\dot{F}_1 = A/(1 - \beta A). \quad (9.1)$$

Второе слагаемое, входящее в знаменатель и равное произведению функций прямой и обратной передач

$$H_p = \beta A = \dot{F}_\beta/\dot{F}, \quad (9.2)$$

представляет функцию передачи разомкнутой системы, получающейся при разрыве выхода блока 2 (рис. 9.8, б).

В большинстве применяемых на практике генераторов релаксационных колебаний используется один элемент, запасаящий энергию — индуктивный или емкостный; применяются также схемы с двумя реактивными элементами. В генераторах гармонических колебаний обычно применяют два или более реактивных элементов.

Изложение начальных сведений о процессах в применяемых на практике автоколебательных системах начнем с рассмотрения генераторов релаксационных колебаний, называемых мультивибраторами. В последующих параграфах рассматриваются процессы в схемах генераторов гармонических колебаний.

## § 9.5. Мультивибраторы на двухполюсных резисторах

Мультивибратором называют нелинейную переключаемую цепь с одним состоянием равновесия. Если это состояние неустойчиво, то в цепи возникают так называемые

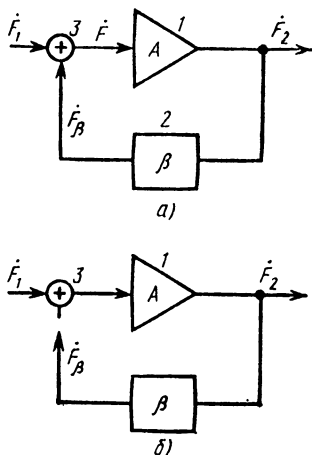


Рис. 9.8

релаксационные колебания существенно несиноусоидальной формы, близкой к прямоугольной: токи и напряжения или их первые производные представляют разрывные функции. При этом цепь является автоколебательной системой или генератором релаксационных колебаний. При устойчивом состоянии равновесия будет заторможенный мультивибратор или одновибратор: если на его вход подать короткий управляющий импульс, то цепь, выведенная из состояния равновесия, после обхода рабочей точкой замкнутого цикла по характеристике вернется в исходное положение. При этом на выходе цепи получится один апериодический импульс, обычно прямоугольной формы.

Мультивибраторы широко распространены в различных устройствах импульсной техники. Существует очень большое число типов мультивибраторов, различающихся видом используемых элементов и модификациями схем. Будем интересоваться также лишь общими принципами работы мультивибраторов без детального разбора возможных схемных решений.

Основной составной частью мультивибраторов с одним линейным (обычно) элементом, запасающим энергию, является резистивная подцепь с источником смещения, имеющая характеристику с падающим участком (туннельные диоды, тиристоры, газоразрядные приборы). Необходимый для выбранного элемента, запасающего энергию, тип характеристики резистивной подцепи определяется условиями получения единственной точки равновесия, а именно:

1. Если запасающим энергию элементом является индуктивность, то для получения единственной точки равновесия, которая располагается на оси  $i$ , входная вольт-амперная характеристика резистивной подцепи должна быть типа  $N$ . Перемещая характеристику параллельно оси  $u$ , изменением параметров цепи смещения можно получить устойчивую или неустойчивую точку равновесия.

2. Если запасающим энергию элементом является емкость, то для получения единственной точки равновесия, которая располагается на оси  $u$ , характеристика резистивной подцепи должна быть типа  $S$ . Для получения устойчивой или неустойчивой точки равновесия необходимо изменением параметров цепи смещения перемещать характеристику параллельно оси  $i$ .

Рассмотрим простейшие схемы мультивибраторов с двухполюсными резистивными элементами, имеющими падающие участки вольт-амперной характеристики.

**Мультивибратор с индуктивным элементом.** Резистивная подцепь должна иметь характеристику типа  $N$ . Типичным

элементом с такой характеристикой является туннельный диод. На рис. 9.9, *а* изображена схема мультивибратора на туннельном диоде с цепью смещения из источника постоянного напряжения  $E$  и последовательно включенного резистора  $R$ . Напряжение на входе резистивной подцепы  $u = Ri + u_2 = E$ . На рис. 9.9, *б* показаны характеристики отдельных элементов резистивной подцепы; для туннельного диода дана приближенная кусочно-линейная характеристика. Суммирование абсцисс графиков дает результирующую характеристику резистивной подцепы, точка пересечения которой с осью  $i$  является точ-

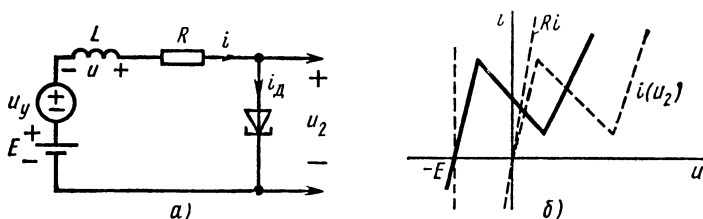


Рис. 9.9

кой равновесия. Изменяя параметры цепи смещения, можно расположить точку равновесия на любой ветви характеристики.

1. Точка равновесия находится на падающей ветви (рис. 9.10, *а*) и, следовательно, неустойчива. Согласно качественным соображениям, изложенным в § 7.3, рабочая точка будет перемещаться по замкнутому пути, обозначенному стрелками и состоящему из возрастающих ветвей характеристики и пунктирных горизонтальных участков. Этот путь удовлетворяет необходимому условию перемещения рабочей точки в цепи с индуктивностью: при  $u > 0$  — сверху вниз, в сторону уменьшения тока, а при  $u < 0$  — снизу вверх, в сторону увеличения тока. Горизонтальным участкам соответствуют скачки напряжения на индуктивности при постоянстве тока. На наклонных линейных участках напряжения и токи будут изменяться по экспонентам, выражения которых нетрудно записать в соответствии с кусочно-линейным методом (см. § 7.3).

Будем рассматривать установившийся режим, соответствующий перемещению рабочей точки по замкнутому пути, указанному стрелками. Если за начальную ( $t = 0$ ) примем точку *а*, то при перемещении рабочей точки по левой ветви характеристики до положения *б* получим следующие величины, определяющие параметры экспонент: начальное значение тока

$I_{01} = I_a$ , установившееся значение тока, равное ординате точки пересечения оси  $i$  продолжением участка  $ab$ ,  $i_{y1} = I_1$ , и сопротивление участка  $r_1 = r_{ab}$ . Нарастание тока на данном участке происходит по закону

$$i = I_1 + (I_a - I_1) e^{-t/\tau_1} \quad (I_a < i < I_b, \quad 0 < t < t_1),$$

где  $\tau_1 = L/r_1$  — постоянная времени цепи.

Из положения  $b$  в положение  $c$  рабочая точка попадает скачком практически мгновенно и далее перемещается по пра-

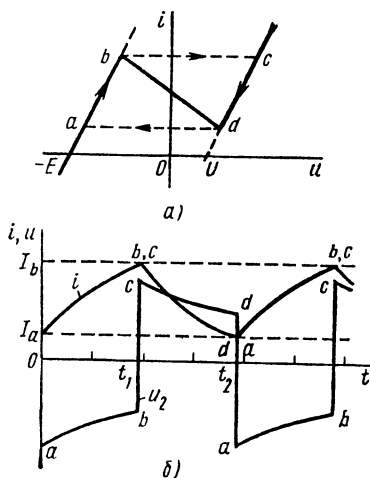


Рис. 9.10

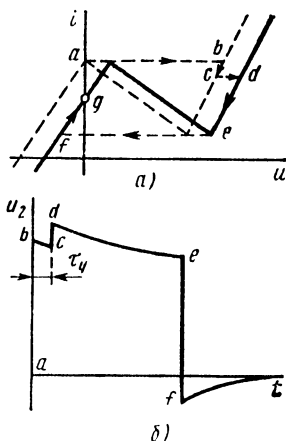


Рис. 9.11

вой ветви вниз до точки  $d$ . Для правой ветви имеем: начальное значение тока  $I_{02} = I_b$ , установившееся значение, равное ординате точки пересечения оси  $i$  продолжением участка  $cd$ ,  $i_{y2} = -I_2$ , и сопротивление участка  $r_2 = r_{cd}$ . Спад тока на рассматриваемом участке происходит по закону

$$i = -I_2 + (I_b + I_2) e^{-(t-t_1)/\tau_2} \quad (I_b > i > I_a, \quad t_1 < t < t_2),$$

где  $\tau_2 = L/r_2$  — постоянная времени цепи.

На рис. 9.9, б нанесены графики нарастания и спада тока по найденным экспонентам. Приняты следующие относительные величины:  $I_a = 1$ ;  $I_1 = 8$ ;  $I_b = 4$ ;  $I_2 = 3$ ;  $\tau_1 = \tau_2$ . Такой же ток проходит по туннельному диоду. Имея кусочно-линейную характеристику туннельного диода и кривую изменения тока во времени, нетрудно получить кривую изменения напряжения на выходе, снимаемого с туннельного диода. Кривая  $u_2(t)$  также показана на рис. 9.10, б. На временных диаграм-

мах указаны буквами соответствующие точки характеристики, приведенной на рис. 9.10, *a*.

2. Точка равновесия находится на левой возрастающей ветви (рис. 9.11, *a*) и, следовательно, устойчива. Чтобы вывести рабочую точку из этого состояния, необходимо на короткое время сместить характеристику влево подачей управляющего импульса длительностью  $\tau_y$  от источника напряжения, включенного последовательно с индуктивностью. При этом

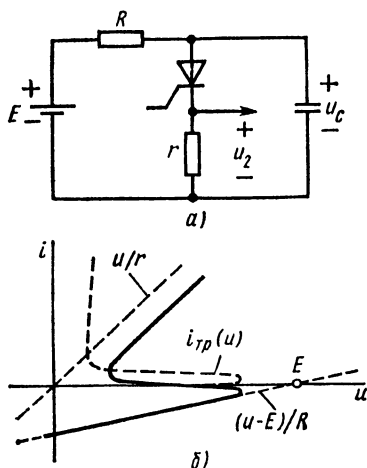


Рис. 9.12

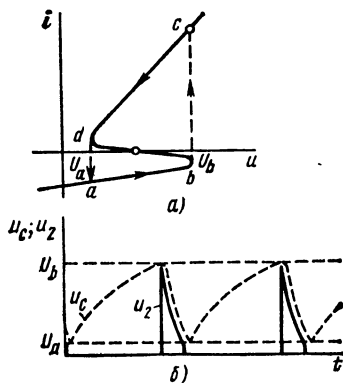


Рис. 9.13

точка равновесия станет неустойчивой и рабочая точка скачком перейдет по горизонтальной пунктирной линии в положение  $b$ , а затем после прохождения управляющего импульса — из положения  $c$  в  $d$  на исходной характеристике. Дальнейшее перемещение рабочей точки до первоначальной устойчивой точки указано стрелками. Форма одиночного импульса напряжения на туннельном диоде с учетом влияния управляющего импульса показана на рис. 9.11, *б*. Если управляющий импульс имеет большую длительность, то, очевидно, можно получить последовательность импульсов.

**Мультивибратор с емкостным элементом.** Резистивная подцепь должна иметь характеристику типа *S*. К элементам с такой характеристикой относятся динистор, тиристор и газоразрядный прибор (тиратрон или неоновая лампа). На рис. 9.12, *a* показана схема мультивибратора на тиристоре. Цепь смещения состоит также из источника постоянного напряжения  $E$  и последовательно включенного резистора с большим сопротив-



лением ( $R \gg r$ ). На рис. 9.12, б приведены характеристики отдельных элементов резистивной подцепи. Для получения результирующей характеристики сначала складываем абсциссы характеристик последовательно включенных тиристора и выходного резистора  $r$ . Затем складываем ординаты получившейся характеристики с ординатами характеристики цепи смещения  $R^{-1} (u - E)$ , поскольку цепь смещения по отношению к емкости включена параллельно тиристорной ветви. Как видно из построения, наклон нижней ветви результирующей характеристики определяется сопротивлением цепи смещения, а наклон верхней ветви при  $R \gg r$  — в основном сопротивлением  $r$ . Положение результирующей входной характеристики резистивной подцепи зависит от параметров цепи смещения.

На рис. 9.13, а представлен вид характеристики для случая неустойчивой точки равновесия, соответствующий генерированию периодических колебаний. Рабочая точка будет совершать непрерывное перемещение по пути, указанному стрелками и состоящему из возрастающих ветвей характеристики и вертикальных пунктирных участков, где происходят скачки токов при постоянстве напряжения на емкости. Указанный путь удовлетворяет необходимому условию перемещения рабочей точки в цепи с емкостью: при  $i > 0$  — справа налево, а при  $i < 0$  — слева направо.

В установившемся режиме процесс изменения напряжения состоит в периодическом нарастании и спаде напряжения на емкости. Нарастание напряжения от  $U_a$  до  $U_b$  соответствует перемещению рабочей точки по участку  $ab$ , где начальное напряжение равно  $U_a$ , а установившееся  $E$ , т. е. абсциссе точки пересечения продолжения участка  $ab$  с осью  $u$ ; постоянная времени здесь  $\tau_1 = RC$ . Следовательно, напряжение

$$u = E + (U_a - E)e^{-t/\tau_1} \quad (U_a < u < U_b).$$

Рабочая точка из положения  $b$  скачком переходит в положение  $c$ . Перемещению точки на участке  $cd$  соответствует спад напряжения от начального значения  $U_b$  до значения  $U_d = U_a$ , которое может быть приближенно принято за установившееся напряжение для рассматриваемого участка. Изменение напряжения на емкости происходит по закону

$$u = U_a + (U_b - U_a)e^{-(t-t_b)/\tau_2},$$

где  $\tau_2 \approx rC$  — постоянная времени цепи.

Изложенную картину изменения напряжения можно также получить непосредственно из рассмотрения схемы, разбивая режим в ней на два следующие друг за другом процесса: 1) процесс относительно медленного заряда емкости через резис-

тор  $R$  с постоянной времени  $\tau_1 = RC$  при запертом тиристоре; 2) процесс после открытия тиристора при  $U_{\text{зак}} = U_b$ , состоящий в разрядке емкости через резистор  $r$  с постоянной времени  $\tau_2 = rC$ .

На рис. 9.13, б приведены кривые напряжения  $u_2$  на выходе и напряжения  $u_c$  на емкости. Если напряжение источника  $E < U_{\text{зак}}$ , то тиристор не откроется (заторможенный режим). Чтобы вывести цепь из этого состояния, следует подать управляющий импульс на затвор тиристора. Очевидно, и в данном случае можно получить периодический процесс, если управление производится повторными импульсами.

## § 9.6. Мультивибраторы на усилителях

Изложим кратко принцип действия наиболее распространенных схем мультивибраторов на усилителях — на компараторе или операционном усилителе (ОУ) и на двухкаскадном транзисторном усилителе с емкостной положительной обратной связью.

1. Рассмотрим работу одной из схем *мультивибратора на ОУ или компараторе*, показанной на рис. 9.14, а. Цепь содержит один запасующий энергию элемент — емкостный, включенный к инвертирующему входу ОУ; этот же вывод соединен через сопротивление  $R$  с выходом с напряжением  $u_3$ . Напряжение, поданное от выхода ОУ к неинвертирующему входу через делитель  $R_1—R_2$ , равно  $u_1 = ku_3 = R_2 u_3 / (R_1 + R_2)$ . Напряжение между выводами входов равно разности напряжений делителя и емкости  $u_{12} = u_1 - u_2 = ku_3 - u_c$ .

Схема имеет два квазистационарных состояния, в каждом из которых она находится в течение определенного конечного интервала времени. На первом интервале длительностью  $\tau_1$  (состояние 1) выходное напряжение постоянно и равно  $+U_3$ , а на втором длительностью  $\tau_2$  (состояние 2) напряжение также постоянное, имеет обратный знак  $-U_3$ . На границе интервалов из-за нарушения устойчивости схема скачком переходит из состояния 1 в состояние 2 и затем в состояние 1 и т. д., так что на выходе получаются прямоугольные колебания.

Скачкообразный переход связан с изменением знака напряжения  $u_{12}$  на входе компаратора, зависящего от процесса перезарядки емкости через  $R$  от постоянного в пределах интервалов  $\tau_1$  и  $\tau_2$  напряжения выхода. При этом  $u_{12} > 0$  соответствует состоянию 1, а  $u_{12} < 0$  — состоянию 2.

На рис. 9.15 изображены графики изменения напряжения на выходе компаратора, на выходе делителя и на емкости.

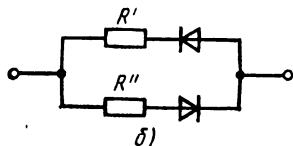
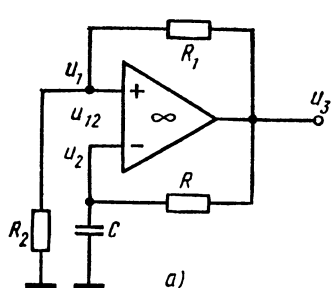


Рис. 9.14

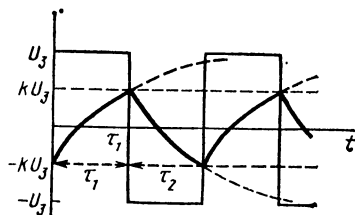


Рис. 9.15

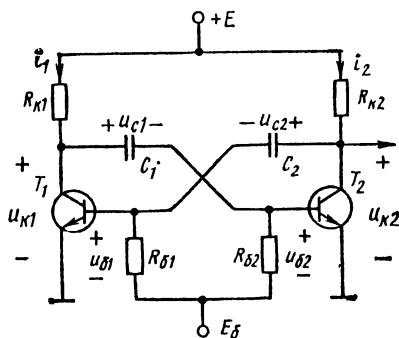


Рис. 9.16

Емкость с начальным напряжением  $u_C(0) = -kU_3$  при  $t > 0$  заряжается напряжением  $U_3 + kU_3$  через  $R$ , так что

$$u_C = U_3 [1 - (1 + k)e^{-t/RC}].$$

При  $t = \tau_1$  напряжение  $u_C(\tau_1) = kU_3$  и компаратор скачком переходят в состояние 2. Далее начинается перезаряд емкости под действием напряжения  $-U_3(1 + k)$ ; в момент  $t = \tau_1 + \tau_2$ , когда  $u_C(\tau_1 + \tau_2) = -kU_3$ , схема скачком переходит в состояние 2. В случае линейного сопротивления  $R$  получим  $\tau_1 = \tau_2 = T/2$  и симметричные колебания.

Несимметричные колебания можно получить, заменив сопротивление  $R$  нелинейным двухполюсником, состоящим, например, из диода и двух резисторов (рис. 9.14, б).

2. Рассмотрим широко применяемую схему мультивибратора на двухкаскадном транзисторном усилителе с положительной обратной связью.

На рис. 9.16 изображена схема мультивибратора на транзисторах  $n-p-n$   $T_1$  и  $T_2$  со смещением баз  $E_6$ . Коллектор  $T_1$  связан с базой  $T_2$  через емкость  $C_1$ , а коллектор  $T_2$  с базой  $T_1$  — через емкость  $C_2$ . Следовательно, цепь имеет два элемента, запасующих энергию, и описывается уравнением второго порядка.

Ограничимся качественным рассмотрением схемы мульти-вибратора как усилителя с положительной обратной связью. Цепь не обладает устойчивостью и в ней возникают колебания, состоящие в поочередном открытии и запираании транзисторов. Период колебаний определяется чередованием двух основных режимов: 1) транзистор  $T_1$  открыт и насыщен, транзистор  $T_2$  заперт; 2) транзистор  $T_1$  заперт, транзистор  $T_2$  открыт (на- насыщен).

Переход из режима 1 в режим 2 и обратно происходит скачком за очень малое время. При анализе процессов в цепи следует иметь в виду следующие простые соотношения:

напряжения на коллекторах

$$u_1 = E - R_{k1}i_1; \quad u_2 = E - R_{k2}i_2,$$

где  $i_1, i_2$  — токи в коллекторных резисторах  $R_{k1}$  и  $R_{k2}$ ; напряжения на базах

$$u_{b1} = u_2 - u_{c2}; \quad u_{b2} = u_1 - u_{c1}.$$

Напряжения на емкостях  $u_{c1}$  и  $u_{c2}$  не могут изменяться скачком.

Примем колебания в схеме мультивибратора установившимися и начнем рассмотрение с режима перехода из одного состояния, например 2, в другое — состояние 1. Начальные условия в цепи — напряжения на емкостях — в этот момент будут определяться режимом в конце предыдущего состояния 2: транзистор  $T_1$  был заперт и напряжение на его коллекторе  $u_1 = E$  успело зарядить емкость  $C_1$  до напряжения  $u_{c1}(0) \approx E$ ; транзистор  $T_2$  был открыт, напряжение на его коллекторе и, следовательно, на емкости  $C_2$  мало  $u_{c2} \approx 0$  ( $C_2$  разряжена через  $T_2, R_{b1}$ ).

Переход наступает в момент, когда из-за малого напряжения на базе открывается транзистор  $T_1$  и токи начинают проходить через оба открытых транзистора.

Переходный режим является весьма кратковременным: свойства цепи таковы, что возникает лавинообразный процесс, приводящий к почти мгновенному открытию  $T_1$  и запираанию  $T_2$  и установлению скачком состояния 1. Чтобы понять указанный процесс, проследим на основе элементарных рассуждений цепь изменений, которые вызовет появление тока  $\Delta i_1$  в транзисторе  $T_1$ : увеличение падения напряжения на резисторе  $R_{k1}$  и соответственное уменьшение напряжения на коллекторе  $T_1$  на  $\Delta u_1$  — уменьшение напряжения на базе  $T_2$  (из-за непрерывности напряжения на емкости  $C_1$ ) на  $\Delta u_{b2}$  — уменьшение тока  $T_2$  на  $\Delta i_2$  — увеличение напряжения на коллекто-

ре  $T_2$  и, следовательно, на базе  $T_1$ , что вызовет дальнейшее увеличение тока  $T_1$  и повторение перечисленной цепочки.

Указанный лавинообразный процесс является следствием полной положительной обратной связи — все напряжение коллектора выходного транзистора подается через емкость на сетку входного транзистора.

В наступившем новом состоянии начнется независимая друг от друга перезарядка обеих емкостей. Именно, перезарядкой емкостей обуславливается неустойчивость двух основных состояний схемы.

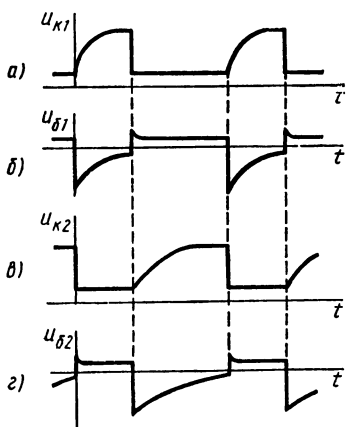


Рис. 9.17

Емкость  $C_2$  с почти нулевым начальным напряжением начнет заряжаться от источника  $E$  через резистор  $R_{κ2}$  и малое сопротивление прямо смещенного перехода транзистора  $T_1$ , шунтирующее  $R_{κ1}$ . Постоянная времени процесса зарядки  $\tau' \approx R_{κ2}C_2$  будет небольшой.

На рис. 9.17, а—г показаны кривые изменения напряжений на базах и коллекторах транзисторов. Падение напряжения на резисторе  $R_{κ2}$  от тока зарядки емкости вызывает за-

кругление кривой напряжения  $u_2$  вблизи вершины — нарастание по экспоненте с постоянной времени  $\tau''$ . Одновременно происходит разрядка емкости  $C_1$  с начальным напряжением  $E$  через открытый транзистор  $T_1$  и резистор  $R_{κ2}$ , на котором появится отрицательное напряжение, спадающее по экспоненте (рис. 9.17) от значения  $-E$  при  $t = 0$  с постоянной времени  $\tau_1 = R_{δ2}C_1 \gg \tau'$ . Это напряжение запирает транзистор  $T_2$  до того момента, пока его абсолютное значение превышает напряжение  $u_{60}$ . В момент времени  $t_1$ , удовлетворяющий условию

$$u_{60} = Ee^{-t_1/\tau_1}; \quad t_1 = \tau_1 \ln (E/u_{60}),$$

открывается транзистор  $T_2$  — наступает следующий кратковременный переходный режим, когда токи проходят через оба транзистора. Этот режим не будет устойчивым — возникнет лавинообразный процесс, аналогичный изменениям, рассмотренным ранее. В результате за очень короткое время установится состояние 2: заперется  $T_1$  и полностью откроется  $T_2$ . При

этом напряжение на открытом транзисторе  $T_2$  скачком упадет, а на запертом транзисторе  $T_1$  возрастет.

В момент времени  $t_1$  начнется перезарядка емкостей, которая приведет к неустойчивости состояния 2. Разряженная емкость  $C_1$  заряжается от источника  $E$  через резистор  $R_{\kappa 1}$  с небольшой постоянной времени. Падение напряжения на резисторе  $R_{\kappa 1}$  от тока зарядки приводит к закруглению кривой напряжения вблизи вершины (рис. 9.17).

Разряд емкости  $C_2$  через открытый транзистор  $T_2$  и резистор  $R_{\kappa 1}$  с постоянной времени  $\tau_2 = R_{\kappa 1}C_2$  в момент времени  $t_2$  приводит к выполнению условия

$$u_{\kappa 0} = Ee^{-(t_2 - t_1)/\tau_2}; \quad t_2 = t_1 + \tau_2 \ln(E/u_{\kappa 0})$$

и отпиранию  $T_1$ . Это означает наступление нового переходного режима. Далее колебательный процесс, состоящий в поочередной смене основных состояний 1 и 2, будет повторяться с периодом  $T = t_2$ .

В каждом из состояний в схеме происходит зарядка емкости, присоединенной к коллектору запертого транзистора, — необходимая подготовка к следующему состоянию, и разрядка ранее заряженной емкости, присоединенной к коллектору открытого транзистора, — процесс, который приводит к наступлению скачкообразного перехода.

Длительность  $t_1$  состояния 1 определяется постоянной времени  $\tau_1$ , а длительность  $T - t_1$  состояния 2 — постоянной времени  $\tau_2$ . Период и соотношение длительностей состояний можно изменять в широких пределах выбором величин емкостей и базовых сопротивлений.

Схему мультивибратора можно перевести в заторможенный режим с одним устойчивым состоянием равновесия. Для этого необходимо последовательно с базовым сопротивлением одного из транзисторов, например  $R_{\kappa 1}$ , включить источник отрицательного напряжения смещения, который запрет  $T_1$ . В состоянии равновесия  $T_1$  заперт, а  $T_2$  открыт — напряжение на его базе равно нулю, емкость  $C_1$  заряжена до напряжения  $u_{C1} \approx E$ . Если на базу  $T_1$  подать положительный управляющий импульс, то этот транзистор откроется, а  $T_2$  почти мгновенно закроется — на его выходе скачком появится напряжение  $u_2 \approx E$ . Длительность указанного состояния определяется разрядкой емкости  $C_1$ , которая приведет через время  $t_1$  к открытию  $T_2$  и мгновенному запирающему  $T_1$ , т. е. к исходному устойчивому состоянию; при этом выходное напряжение примет нулевой уровень.

## § 9.7. LC-генераторы гармонических колебаний

Генераторы гармонических колебаний с  $LC$  колебательными контурами относятся к наиболее распространенному классу применяемых на практике автоколебательных систем. Из большого числа имеющихся различных схем генераторов с  $LC$  колебательными контурами остановимся кратко лишь на нескольких типичных схемах с нелинейными трехполюсниками. В качестве основных частей в схемы генераторов входят следующие элементы и цепи: 1) управляемый трехполюсный

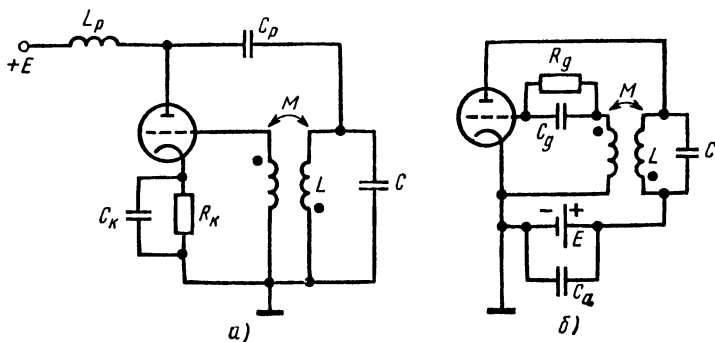


Рис. 9.18

нелинейный элемент (НЭ) — электронная лампа — триод или транзистор (биполярный или полевой); 2) параллельный  $LC$  колебательный контур с резонансной частотой  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  и добротностью  $Q$ ; при обычной высокой добротности входное сопротивление контура при частоте, равной резонансной,  $R_k = \rho Q$ , где  $\rho = \sqrt{L/C}$ ; 3) ветвь обратной связи, подающая на управляющий вход трехполюсника часть напряжения колебательного контура; 4) цепи постоянного напряжения и тока источника питания и смещений, устанавливающих нужные рабочие точки на характеристиках нелинейного элемента.

Принципиальные схемы лампового генератора высокочастотных колебаний приведены на рис. 9.18. Нелинейным элементом на схемах является управляемый электронный триод. Колебательный контур из параллельно соединенных емкости  $C$  и индуктивности  $L$ , присоединенный к аноду, является нагрузкой лампы — триода. На схемах показана трансформаторная обратная связь, осуществляемая с помощью взаимной индуктивности  $M$ . Напряжение  $\dot{U} = j\omega M \dot{I}_L$ , наведенное в катушке взаимной индуктивности, присоединенной к

сетке лампы, должно иметь полярность, обратную полярности напряжения на контуре или аноде — только при этом условии возможно возбуждение автоколебаний.

Источник постоянного напряжения питания, энергия которого преобразуется в энергию высокочастотных колебаний, можно подключить по последовательной или параллельной схеме. В случае *параллельной схемы* (рис. 9.18, а) источник через разделительную индуктивность  $L_p$  (дроссель) подключается к аноду триода. Если индуктивное сопротивление  $\omega_0 L_p \gg r_a$  ( $r_a$  — анодное сопротивление лампы), то дроссель изолирует контур с высокочастотным колебанием от замыкания на землю через источник. Обратную роль играет блокировочный конденсатор  $C_p$ , изолирующий постоянное напряжение источника от короткого замыкания через индуктивность контура и одновременно беспрепятственно пропускающий ток высокой частоты к аноду лампы, для чего должно выполняться условие:  $\omega_0 C_p \gg 1/R_k$ . Преимущество параллельного питания состоит в том, что вывод колебательного контура может быть заземлен и, кроме того, через индуктивность контура не проходит постоянная составляющая тока.

В случае *последовательной схемы* (рис. 9.18, б) источник питания, контур и нелинейный трехполюсник соединены последовательно. Здесь не требуется иметь разделительный дроссель, но контур находится под напряжением источника питания, причем постоянная составляющая тока источника проходит через индуктивность контура. Блокировочный конденсатор  $C_a$  пропускает переменную составляющую тока, разгружая от нее источник.

Благоприятный для генерирования колебаний режим триода обеспечивается подачей на сетку нужного постоянного напряжения смещения. Обычно применяют автоматическое смещение сетки триода за счет падения напряжения в сопротивлении  $R_k$  от постоянной составляющей тока лампы (рис. 9.18, а) или в сопротивлении  $R_g$  от постоянной составляющей тока сетки (рис. 9.18, б). Значения этих сопротивлений выбирают из условия получения требуемого напряжения смещения, т. е. нужного положения рабочей точки на характеристике. Блокировочные конденсаторы, которые пропускают ток высокой частоты, избавляя от него резисторы, должны иметь проводимость  $\omega_0 C_g \gg R_g^{-1}$ . Как видно, блокировочные конденсаторы и дроссель служат для разделения путей прохождения постоянного тока и тока высокой частоты, т. е. выполняют вспомогательную роль и не влияют на работу генератора.

На рис. 9.19 изображена схема генератора с колебательным контуром на *п о л е в о м т р а н з и с т о р е* также с транс-



форматорной обратной связью. Показаны последовательное соединение источника питания и элементы автоматического смещения с блокировочными конденсаторами.

Анализ процессов возникновения и установления колебаний в ламповом и транзисторном генераторах синусоидальных колебаний производится по схемам замещения для переменной составляющей сигнала, которые получаются при коротком замыкании всех блокировочных конденсаторов и разрыве дросселей. Для генераторов на триоде (см. рис. 9.18) и полевом транзисторе (см. рис. 9.19) получаются схемы замещения, приведенные на рис. 9.20, а, б. Схемы содержат: управляемый нелинейный трехполюсный элемент (триод или транзистор), присоединенный к его выходу (аноду или стоку) колебательный контур с выводами цепи обратной связи (катушки взаимной индуктивности).

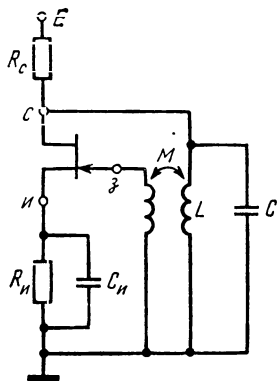


Рис. 9.19

Исследование процессов в  $LC$ -генераторах гармонических колебаний, представляющих автоколебательную систему второго порядка с двумя запасящими энергию элементами, удоб-

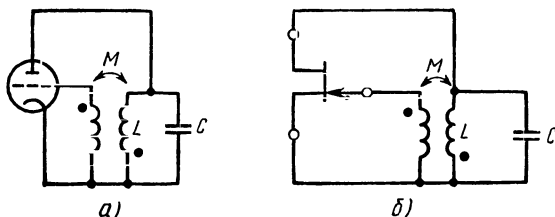


Рис. 9.20

но производить на основе *модели системы с обратной связью* (см. рис. 9.8). Принимаем в качестве блока 1 прямой передачи — нелинейный трехполюсник, выполняющий роль усилителя, а в качестве блока 2 обратной связи — пассивную цепь, состоящую из колебательного контура и ветви в виде катушки взаимной индуктивности. На рис. 9.21, а оба блока заключены в пунктирные прямоугольники. Для принятого разбиения структуры генератора на блоки имеем следующие соответствия между переменными общего вида в (9.1) и переменными рас-

смаатриваемого генератора:  $\dot{F}_1 = \dot{U}_1$  — напряжение внешнего сигнала;  $\dot{F}_2 = \dot{I}_2$  — выходной ток усилителя;  $\dot{F}_\beta = \dot{U}_\beta$  — напряжение, подаваемое на вход по цепи обратной связи;  $\dot{F} = \dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_\beta$  — напряжение на входе усилителя.

Рассмотрим функции передачи обоих блоков.

1. Отнесенный к направленному блоку 1 прямой передачи управляемый нелинейный трехполюсник в виде электронного триода (полевого транзистора) с очень высоким входным и относительно низким выходным сопротивлениями можно в

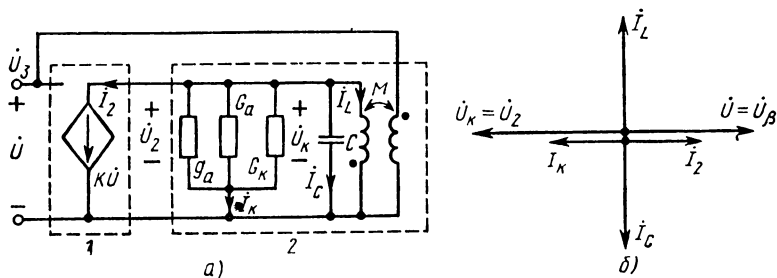


Рис 9.21

режиме генерации приближенно представлять зависимым источником тока, управляемым напряжением сетки (затвора). Ток этого источника определяется передаточной характеристикой — зависимостью анодного (стокового) тока от напряжения сетки (затвора)

$$i_2 = f(u). \quad (9.3)$$

Характеристика эта нелинейна — с увеличением тока от малых значений крутизна нарастает, затем достигается линейный участок с максимальной крутизной; при дальнейшем увеличении тока крутизна характеристики уменьшается. На рис. 9.22, а, в изображены анодно-сеточная характеристика триода и ее крутизна при смещении, дающем положение рабочей точки на линейном участке с максимальной крутизной, а на рис. 9.22, б, г — на нижнем изгибе, когда максимум смещен вправо от оси ординат.

В рассматриваемой схеме генератора с нелинейным элементом, соединенным каскадно с высокоизбирательным контуром, превалирует колебание с резонансной частотой, так что можно уверенно применять метод гармонической линеаризации (см. § 8.4), позволяющий проводить приближенный анализ в частотной области по методу комплексных амплитуд, вводя функцию передачи нелинейного элемента с учетом толь-

ко первой гармоники выходной реакции. Эта функция передачи, представляющая отношение комплексных амплитуд первой гармоники выходного тока и напряжения на входе, в отличие от функции линейного элемента, зависит не только от частоты, но также от амплитуды синусоидального сигнала на входе.

Для резистивного трехполюсника — триода функция передачи гармонической линеаризации, называемая с р е д н е й к р у т и з н о й, зависит только от амплитуды входного напряжения:

$$A(j\omega, U) = \dot{I}^{(1)}(U) / \dot{U} = K(U). \quad (9.4)$$

В случае монотонной характеристики (рис. 9.22, б), аппроксимированной полиномом третьей степени, амплитуда

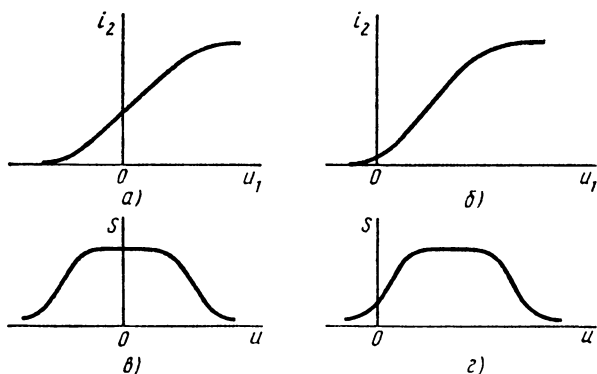


Рис. 9.22

первой гармоники выходного тока, как было показано в § 8.4,  $I_2^{(1)} = a_1 U + (3/4)a_3 U^3$ , так что средняя крутизна

$$S_{\text{ср}}(U) = K(U) = a_1 + (3/4)a_3 U^2 = S + 3S_1 U^2, \quad (9.5)$$

где  $S$  — крутизна на линейном участке.

Схема замещения нелинейного триода — усилителя кроме зависимого источника тока, управляемого напряжением через функцию  $K(U)$ , содержит подключенные параллельно ему внутреннюю анодную (стоковую) проводимость  $g_a$  и проводимость  $G_a$  нагрузки. Общую проводимость  $g = g_a + G_a$  можно учесть, присоединяя ее к проводимости колебательного контура.

2. Параллельный колебательный контур, отнесенный к блоку 2 обратной связи, будем предполагать высокодоброт-

ным, когда с достаточно высокой точностью можно принимать резонансную частоту и ширину резонансной кривой равными

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}; \Delta\omega = \omega_0/Q. \quad (9.6)$$

В узкой полосе частот в окрестности резонансной частоты  $\omega_0$  приближенную схему замещения колебательного контура можно представлять состоящей из параллельно соединенных индуктивного, емкостного и резистивного элементов (см. рис. 9.21, а). Проводимость  $G_R$  резистивного элемента в этой полосе допустимо принять постоянной, не зависящей от частоты. Общая активная проводимость  $G = g + G_R$ ; добротность контура

$$Q = \sqrt{C/L}/G = \frac{R}{\rho} \gg 1. \quad (9.7)$$

Входная комплексная проводимость контура

$$Y \approx G + j(\omega C - 1/\omega L) = G \left[ 1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]. \quad (9.8)$$

Входной переменной блока 2 является ток  $I_2$  выхода нелинейного зависимого источника тока. Напряжение на входе контура и ток в индуктивной ветви

$$\dot{U}_2 = -I_2/Y; \quad I_L = U_2/j\omega L = -I_2/j\omega LY. \quad (9.9)$$

Здесь знак «минус», соответствующий указанной на рис. 9.21, а положительной полярности  $\dot{U}_2$ , означает, что усилитель бращает знак или фазу напряжения — выходное напряжение по отношению к входному при  $Y = G$  (резонансе) сдвинуто по фазе на  $180^\circ$ .

В случае трансформаторной обратной связи выходное напряжение блока, равное напряжению катушки взаимной индуктивности и подаваемое на вход усилителя,

$$\dot{U}_\beta = -j\omega |M| I_L = |M| I_2 / LY. \quad (9.10)$$

Знак «минус» соответствует указанным на рис. 9.21, а полярности напряжения  $\dot{U}_\beta$  и знакам однополярных выводов катушек. Выходное напряжение блока обратной связи по отношению к напряжению  $\dot{U}_2$  на контуре сдвинуто по фазе на  $180^\circ$ . На рис. 9.21, б изображена векторная диаграмма напряжений и токов схемы генератора в режиме резонанса в колебательном контуре. Вектор выходного тока  $I_2$  принят совпадающим по фазе с напряжением на входе  $\dot{U}$ . Напряжение на контуре, равное напряжению на выходе усилителя  $\dot{U}_2$ , сдви-

нуто по фазе по отношению к напряжению входа на  $180^\circ$ . Векторы токов  $I_C$  и  $I_L$  сдвинуты по фазе относительно  $\dot{U}_2$  на  $\pm 90^\circ$ . Вектор напряжения  $\dot{U}_\beta$  на выходе блока 2 в зависимости от знака  $M$  может совпадать по фазе либо с  $\dot{U}_2$ , либо с  $\dot{U}$ . Согласно (9.10), необходим выбор  $M < 0$ , при котором  $\dot{U}_\beta$  совпадает по фазе с  $\dot{U}$ , а по отношению к напряжению  $\dot{U}_2$  на входе цепи обратной связи сдвинут по фазе на  $180^\circ$ , что компенсирует обращение фазы, производимое усилителем.

Искомую функцию передачи блока обратной связи, равную отношению комплексных амплитуд напряжения на его выходе и выходного тока усилителя, с учетом (9.8) и (9.10) представим как

$$\beta(j\omega) = \frac{\dot{U}_\beta}{I_2} = \frac{|M|}{LY} = \frac{\omega_0 |M| Q}{1 + jQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)}. \quad (9.11)$$

Функция передачи разомкнутой системы, т. е. произведение прямой (9.4) и обратной (9.11) передач,

$$\begin{aligned} H_p(j\omega, U) &= A\beta = K(U) \frac{\omega_0 |M| Q}{1 + j\xi} = \\ &= K(U) \frac{\omega_0 |M| Q}{\sqrt{1 + \xi^2}} e^{j\psi(\omega)}, \end{aligned} \quad (9.12)$$

где  $\xi = Q(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)$ ;

$$\psi(\omega) = \arctg Q(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega) = \arctg \xi$$

зависит от частоты установившихся колебаний и амплитуды напряжения на входе.

## § 9.8. Условия стационарности.

### Режимы самовозбуждения

Рассмотрим условия стационарности колебаний на основе качественных представлений о процессах в схеме генератора как системе с простой обратной связью. При отсутствии внешнего воздействия ( $\dot{F} = \dot{U}_1 = 0$ ) и почти гармоническом режиме автоколебаний напряжение на входе (сетке) триода при замыкании ветви обратной связи должно равняться напряжению, переданному к входу от выхода по блоку  $\beta$ :  $\dot{U} = \dot{U}_\beta = H_p U = K(U) \beta(j\omega) \dot{U}$

Отсюда следует основное соотношение стационарности режима автоколебаний

$$H_p(j\omega, U) = K(U) \beta(j\omega) = \frac{K(U) \omega_0 M Q e^{i\psi(\omega)}}{\sqrt{1 + Q^2 (\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}} = 1. \quad (9.13)$$

Стационарным колебаниям соответствует равенство комплексной функции передачи разомкнутой системы вещественной величине — единице.

Соотношение (9.13) будет удовлетворяться при выполнении двух условий стационарности колебаний:

1. *Условие фаз* — угол полного фазового сдвига между сигналом на входе и сигналом, переданным через блоки прямой и обратной передач к входу, в режиме установившихся колебаний должен быть:

$$\psi(\omega) = k \cdot 2\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (9.14)$$

Это условие удовлетворяется согласно (10.12) при  $\omega = \omega_0$ . Следовательно, в генераторе гармонических колебаний устанавливается частота  $\omega_0$ , равная резонансной частоте контура — только при этой частоте угол  $\psi(\omega) = 0$  или кратен  $2\pi$ .

2. *Условие амплитуд* — для установившегося стационарного колебания с частотой  $\omega_0$  модуль функции передачи разомкнутой системы, равный произведению модулей прямой и обратной передач, должен быть равен единице

$$\beta K(U) = 1. \quad (9.15)$$

При учете значений модулей  $A$  и  $\beta(j\omega)$  при  $\omega = \omega_0$  согласно (9.13) и (9.14) имеем

$$|A\beta| = K(U) \omega_0 M Q = K(U) M / RC = 1. \quad (9.16)$$

Отсюда следует вывод: в режиме установившихся колебаний стационарную амплитуду напряжения  $U$  на входе триода надо определять из уравнения

$$K(U) = RC/M = P. \quad (9.17)$$

Величину в правой части  $P = RC/M$ , называемую коэффициентом обратной связи и зависящую от параметров линейной части, можно регулировать в широких пределах, изменяя взаимную индуктивность.

Решение уравнения (9.17) определяется точками пересечения графика  $K(U)$  и линии коэффициента обратной связи  $P$ . При отсутствии точек пересечения (решений) установившегося колебания не будет. Но, увеличивая взаимную индуктивность или усиление  $K(U)$ , всегда можно получить точки пере-

сечения и, следовательно, режим генерации установившихся колебаний.

Рассмотрим режимы самовозбуждения колебаний в генераторе. Как было показано в § 8.3, для самовозбуждения генератора необходимо выполнение условия (8.31) неустойчивости точки равновесия. В предположении того, что начальная точка равновесия может располагаться на любом участке передаточной характеристики, заменим в (8.31) крутизну  $S$  на линейном участке средней крутизной и тогда условие самовозбуждения получит вид

$$S_{\text{ср}} = K(U_y) \geq P = RC/M. \quad (9.18)$$

Для самовозбуждения колебаний необходимо, чтобы усиление или средняя крутизна триода  $S_{\text{ср}}$  в окрестности начального состояния превышала коэффициент обратной связи.

Очевидно, увеличивая взаимную индуктивность или усиление, всегда можно получить самовозбуждение колебаний. Процесс самовозбуждения колебаний из положения неустойчивого состояния равновесия качественно можно представлять следующим образом. В любом элементе цепи имеют место малые хаотические флуктуации тока, которые вызывают колебания тока в контуре. Наведенное этим малым током напряжение, поданное по ветви обратной связи на вход триода, будет усилено и передано в контур согласно (9.10) в той же фазе, что и начальное колебание. Последовательная передача сигнала от выхода усилителя к входу по цепи обратной связи и от входа к выходу приведет к нарастанию тока в контуре и напряжения до установившегося значения.

Очень важным после возникновения колебаний является режим установления стационарных колебаний. Решающую роль здесь играет влияние нелинейности  $S_{\text{ср}} = K(U)$  — при постоянстве крутизны, т. е. в случае линейности характеристики, амплитуда колебаний нарастала бы неограниченно. Только нелинейность характеристики, именно снижение средней крутизны при больших напряжениях, обеспечивает пересечение графиков  $K(U)$  и  $P$ , дающих точки стационарных колебаний. Вид нелинейной передаточной характеристики триода зависит от смещения, определяющего положение рабочей точки.

Рассмотрим режимы самовозбуждения и стационарных колебаний для двух положений рабочей точки на передаточной характеристике: 1) на линейном участке; 2) на нижнем ее изгибе.

1. При расположении рабочей точки на *линейном участке* характеристики график  $K(U)$  с увеличением напряжения мо-

нотонно падает (рис. 9.23, а), вначале медленно, а затем быстрее. Самовозбуждение колебаний происходит при  $K(0) \geq P$ . Сначала на участке, близком к линейному, где график  $K(U)$  почти постоянен (рис. 9.23, а), амплитуда нарастает согласно уравнению (8.30) по экспоненте ( $a < 0$ ):  $u = U \exp(|a|t) \times \sin \omega_0 t$ .

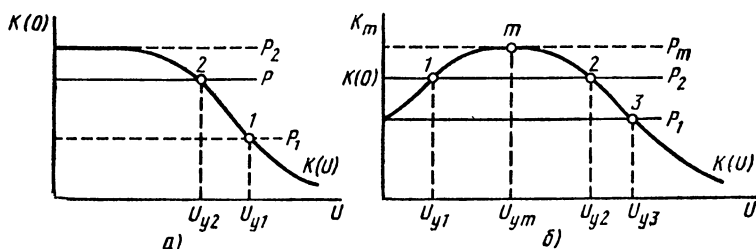


Рис. 9.23

На фазовой плоскости получим траекторию в виде логарифмической спирали, направленной от начала координат (рис. 9.24, а). По мере увеличения напряжения и снижения  $K(U)$  скорость нарастания колебаний уменьшается, пока не

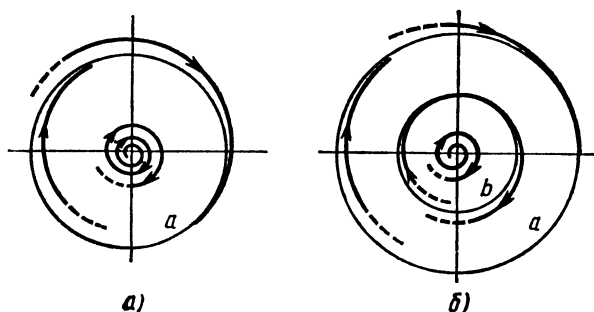


Рис. 9.24

будет достигнута точка 2 пересечения, соответствующая устойчивому режиму установившегося колебания с амплитудой  $U = U_{y2}$ . Здесь речь идет об устойчивости режима, под которой понимают способность системы возвращаться в исходный режим после сообщения малого кратковременного возмущения  $\pm \Delta U$ . В рассматриваемой точке, где  $S_{cp}$  падает ( $dS_{cp}/dU < 0$ ), отклонение  $+\Delta U$  ( $-\Delta U$ ) уменьшает (увеличивает)  $K(U)$ , и, следовательно,  $U$ , так что режим устойчив. Как видно, точки пересечения на спадающем участке средней кру-



тизны дают устойчивый стационарный режим. Этот же вывод был получен из рассмотрения уравнения первого порядка (8.34) для амплитуды колебаний. На фазовой плоскости стационарному режиму соответствует устойчивый предельный цикл  $a$ , к которому направлены траектории как с внутренней, так и внешней областей. Чтобы попасть на траектории, исходящие не от начала координат, следует приложить соответствующие начальные условия.

Проследим характер изменения  $U_y$  от изменения взаимной индуктивности. При плавном увеличении  $M$  (уменьшении  $P$ ), как видно из рис. 9.23,  $a$ , стационарная амплитуда  $U_y$  будет плавно нарастать, а при уменьшении  $M$  — также плавно снижаться до нуля. Подобный режим генератора называют *мягким режимом самовозбуждения*.

2. Если рабочая точка расположена на *нижнем изгибе* передаточной характеристики, то график  $K(U)$  имеет максимум  $K_m$ . Самовозбуждение колебаний при нулевых начальных условиях возможно только при  $K(0) \geq P$ ; при этом колебания здесь нарастают быстрее, так как вначале одновременно растет усиление. В точке 3 пересечения линии  $P_1$  и графика усиления  $K(U)$  на его спадающем участке, где режим устойчив, установятся стационарные колебания с амплитудой  $U_{y3}$ .

Качественно иной будет картина в случае  $K(0) < P = P_2 < K_m$  — здесь получаются два возможных стационарных режима или две точки пересечения: 1 — неустойчивого и 2 — устойчивого режимов. В точке, где  $S_{cp}$  возрастает ( $dS_{cp}/dU > 0$ ), отклонение  $+\Delta U$  ( $-\Delta U$ ) увеличивает (уменьшает)  $K(U)$  и, следовательно, напряжение — соответственно режим перейдет в устойчивую точку 2 или в точку  $K(0)$  на оси ординат, так что точка 1 действительно неустойчива — режим в нее не возвращается. Как видно, точкам на нарастающем участке  $K(U)$  соответствует неустойчивый режим.

На фазовой плоскости (рис. 9.24, б) режим в точке 2 представляется устойчивым предельным циклом  $a$ , а режим в точке 1 — неустойчивым предельным циклом  $b$  меньшего радиуса.

В рассматриваемом случае  $P = P_2$  самовозбуждение колебаний при нулевых начальных условиях невозможно. Для возбуждения колебаний необходимо приложить напряжение  $U \geq U_{y1}$ , при котором в силу  $K(U) \geq P_2$  нарастание колебаний приведет систему в точку 2 устойчивого стационарного режима. Следовательно, траектории в этой области будут по спиралям направлены от неустойчивого предельного цикла к устойчивому. При начальном напряжении  $U < U_{y1}$  колебания будут затухать до нуля, так что траектории будут направлены от неустойчивого предельного цикла к началу координат.

Характер изменения стационарной амплитуды  $U_y$  в зависимости от взаимной индуктивности для рассматриваемой формы  $K(U)$  получается своеобразным: самовозбуждение при плавном увеличении  $M$  дает сразу значение  $U_y = U_{y3}$ , которое затем плавно нарастает. При плавном уменьшении  $M$  (увеличении  $P$ ) стационарная амплитуда также плавно уменьшается до  $U_y = U_{ym} < U_{y3}$ , соответствующего максимуму  $K(U)$ , где условие стационарности нарушается — происходит срыв колебаний:  $U_y = 0$ . Изложенный режим генератора называют жестким режимом самовозбуждения.

Хотя жесткий режим не обладает плавностью изменения стационарной амплитуды колебаний, но он позволяет работать с более высоким напряжением и соответственно с более высокими мощностью и к. п. д.

### § 9.9. Трехточечные схемы LC-генераторов. RC-генераторы

В рассмотренных схемах генераторов с трансформаторной обратной связью нужную для напряжения обратной связи полярность, противоположную полярности напряжения на

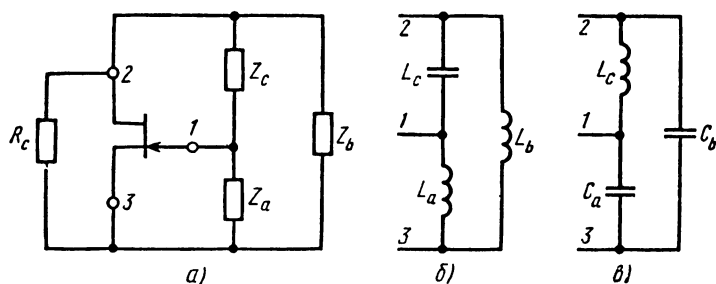


Рис. 9.25

контуре, можно получить переключением выводов катушки взаимной индуктивности. В широко применяемых на практике схемах LC-генераторов с индуктивными и емкостными обратными связями требуемую полярность напряжения обратной связи получают с помощью так называемой трехточечной схемы включения колебательного контура.

На рис. 9.25, а изображена общая структура трехточечной схемы генератора на полевом транзисторе для переменной составляющей сигнала. Через  $Z_a = jx_a$ ;  $Z_b = jx_b$  и  $Z_c = jx_c$

обозначены комплексные сопротивления реактивных элементов колебательного контура. Напряжение обратной связи, подаваемое на управляющий затвор, снимается с сопротивления  $Z_a$ .

Для приближенного определения выражения функции передачи разомкнутой системы представим нелинейный трехполусник усилителем, как и в § 9.7, но учтем его конечное выходное сопротивление  $R_0$ . Это сопротивление включено последовательно с сопротивлением контура  $Z = Z_b (Z_a + Z_c) / (Z_a + Z_b + Z_c)$ . Напряжение на контуре  $\dot{U}_k = \dot{U}_2 / (R_0 + Z)$  ( $\dot{U}_2$  — напряжение на выходе усилителя) делится между сопротивлениями  $Z_c$  и  $Z_a$ . Падение напряжения на  $Z_a$  определяет интересующую нас функцию обратной передачи

$$\dot{p} = \frac{-K Z_a Z_b}{(Z_a + Z_c) Z_b + (Z_a + Z_b + Z_c) R_0}.$$

Основное соотношение стационарности режима автоколебаний получим, приравняв согласно (9.13) единице функцию передачи разомкнутой системы:

$$-A\dot{p} = \frac{K x_a x_b}{-(x_a + x_c) x_b + j(x_a + x_b + x_c)} = 1. \quad (9.19)$$

Первым условием выполнения этого соотношения является условие фаз — кратность  $2\pi$  угла фазового сдвига или равенство нулю мнимой части

$$x_a + x_b + x_c = 0; \quad x_c = -(x_a + x_b). \quad (9.20)$$

Второе условие стационарности режима — условие модулей (амплитуд) при учете (9.20) запишем как

$$K\beta = K x_a / (x_a + x_c) = 1. \quad (9.21)$$

Из условия (9.20) следует: элементы  $x_a$  и  $x_b$  должны иметь одинаковый знак, т. е. быть либо индуктивностями  $L_a$  и  $L_b$ , либо емкостями  $C_a$  и  $C_b$ , а элемент  $x_c$  соответственно емкостью  $C_c$  и индуктивностью  $L_c$ . В первом случае будем иметь генератор с индуктивной, а во втором — емкостной обратной связью (рис. 9.25, б, в).

Равенство (9.21) дает уравнение для стационарной амплитуды колебаний

$$K(U_y) = K_0 = (1 + x_c/x_a). \quad (9.22)$$

Рассмотрим кратко схему генератора гармонических колебаний, в котором вместо  $LC$  колебательного контура в качестве цепи обратной связи применена резистивная цепь. На рис. 9.26 изображена типичная

схема  $RC$ -генератора на полевом транзисторе. Полевой транзистор с нагрузочным стоковым сопротивлением  $R_c$  представим усилителем со средним коэффициентом усиления  $K(U)$  в предположении пренебрежимо малого влияния  $RC$ -цепи. Усилитель, представляющий блок прямой передачи, вносит сдвиг фазы на  $180^\circ$  для напряжения любой частоты, поступающего на затвор.

Пассивная цепь имеет лестничную структуру фильтра верхних частот с одинаковыми емкостями  $C$  в качестве продольных ветвей и одинаковыми сопротивлениями  $R$  поперечных резистивных элементов. Назначение этой цепи, которая рассматривается как цепь обратной связи, состоит в создании на частоте установившихся колебаний сдвига по фазе для управляющего напряжения на затворе в  $180^\circ$ , который необходим для компенсации обращения полярности напряжения в усилителе.

Максимальный сдвиг по фазе одного  $CR$ -звена первого порядка верхних частот составляет  $90^\circ$  (при  $\omega = 0$ ); с ростом  $\omega$  сдвиг уменьшается до нуля ( $\omega = \infty$ ). Для получения угла в  $180^\circ$  поэтому требуется минимум три звена.

Функцию передачи  $RC$  цепи обратной связи (см. рис. 9.26, б) легко найти, используя, например, метод пропорциональных величин: при  $G = 1/R$  и  $Z_C = 1/j\omega C$  имеем

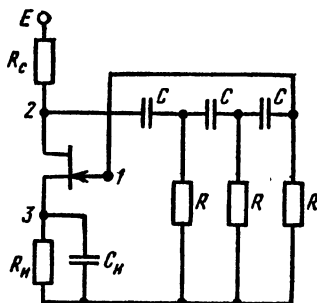


Рис. 9.26

$$\dot{U}_4 = \dot{U}_\beta; \quad I_{3-4} = G\dot{U}_\beta; \quad \dot{U}_3 = (1 + GZ_C) \dot{U}_\beta;$$

$$I_{3-0} = G\dot{U}_3; \quad I_{2-3} = G(2 + GZ_C) \dot{U}_\beta;$$

$$\dot{U}_2 = 1 + 3GZ_C + (GZ_C)^2;$$

$$I_{2-0} = G\dot{U}_2; \quad I_1 = G[3 + 4GZ_C + (GZ_C)^2] \dot{U}_\beta;$$

$$\dot{U}_1 = [1 + 6GZ_C + 5(GZ_C)^2 + (GZ_C)^3] \dot{U}_\beta = 1/\beta.$$

Отсюда функция передачи цепи обратной связи ( $\tau = RC$ )

$$\beta(j\omega) = \frac{1}{1 - 5/(\omega\tau)^2 + j[(\omega\tau)^{-3} - 6/\omega\tau]}.$$

Тангенс угла сдвига фазы

$$\operatorname{tg} \psi = (1 - 6\omega^2\tau^2)/\omega\tau (\omega^2\tau^2 - 5).$$

Угол  $\psi = \pi$  достигается при частоте

$$\omega = 1/\sqrt{6} \tau = 1/\sqrt{6} RC. \quad (9.23)$$

Как видно, частота установившихся колебаний обратно пропорциональна постоянной времени  $RC$ -звена. При частоте (9.23) значение функции обратной передачи получится равным  $|\beta(\omega_0)| = 1/29$ . В соответствии с условием (9.15) для модуля функции передачи разомкнутой системы имеем

$$|\beta A| = K(U)/29 \geq 1; \quad K(U) \geq 29.$$

Для генерации установившихся колебаний необходимо, чтобы коэффициент усиления усилителя имел значение, превышающее число 29.

Следует отметить, что колебания с частотами, отличными от (9.23), не удовлетворяют условию стационарности и не возбуждаются. Поэтому установившиеся колебания с частотой  $\omega_0$ , имеют форму, близкую к синусоидальной.

Очень важное преимущество  $RC$ -генераторов состоит в возможности получения гармонических колебаний в широком диапазоне частот, начиная от очень низких — единиц герц до сотен килогерц, которые сложно получить с помощью  $LC$ -генераторов. Регулировку частоты можно производить изменением емкости конденсаторов; при этом частота генератора обратно пропорциональна емкости в первой степени, а не в половинной, как в случае  $LC$ -генератора, что обеспечивает лучшее перекрытие диапазона частот.

## ГЛАВА 10

### ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

### С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

#### § 10.1. Элементы электрических цепей с переменными параметрами

До сих пор предполагалось, что характеристики элементов цепи, как линейных, так и нелинейных, не зависят явно от времени. Такие элементы называются **инвариантными во времени** или **элементами с постоянными параметрами**. Если в дополнение к независимости от времени характеристики являются линейными, то параметры элементов будут постоянными, которые задаются величинами сопротивления  $R$ , индуктивности  $L$  и емкости  $C$ .

В общем случае характеристики элементов могут быть **нелинейными** и, кроме того, **зависеть от времени**.

и. Характеристики нелинейных резистивных, индуктивных и емкостных элементов с переменными параметрами можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} u &= u(i, t); \\ \Psi &= \Psi(i, t); \\ q &= q(u, t). \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

Процессы в цепях с подобными элементами получаются очень сложными. Вопросы анализа нелинейных цепей с переменными параметрами в настоящее время разработаны недо-

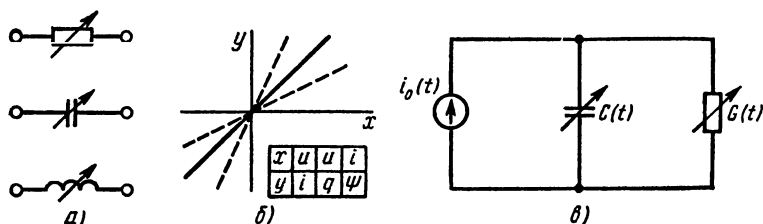


Рис. 10.1

статочно. Поэтому не будем ставить задачу рассмотрения цепей общего вида, а ограничимся кратким изложением некоторых особенностей линейных цепей с переменными параметрами.

В случае линейных элементов с переменными параметрами можно ввести зависящие от времени параметры  $R$ ,  $L$  и  $C$ -коэффициенты в линейных соотношениях между величинами, характеризующими состояние цепи:

$$\left. \begin{aligned} u &= R(t) i; \\ \Psi &= L(t) i; \\ q &= C(t) u. \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

В отличие от элементов с постоянными параметрами здесь *сопротивление, индуктивность и емкость являются функциями времени*. Практически наибольший интерес представляет изменение параметров цепи по периодическому закону.

Рассмотрим кратко три вида линейных двухполюсных элементов с переменными параметрами.

**Резистивный элемент** (рис. 10.1, а). Линейность резистивного элемента означает, что в любой фиксированный момент времени зависимость тока от напряжения будет линейной — вольт-амперная характеристика будет изображаться прямой,

проходящей через начало координат (рис. 10.1, б). Угловой коэффициент прямой равен величине проводимости  $1/R$  для данного момента времени. Так как  $R = R(t)$ , то для следующего момента времени получим другую прямую. Следовательно, характеристика элемента в виде переменного сопротивления будет представляться семейством прямых, лежащих между двумя крайними прямыми, соответствующими максимальному и минимальному значениям сопротивления.

Переменное сопротивление можно получить, например, с помощью потенциометра с вращающимся подвижным электродом. При постоянстве скорости вращения получим изменение сопротивления по периодическому закону. Форму кривой изменения сопротивления можно регулировать нанесением проводящего материала различной толщины или электропроводности. Практически более приемлемым является скачкообразное изменение сопротивления с помощью периодического включения и отключения ключа, шунтирующего часть резистивного элемента. При этом сопротивление будет изменяться скачками между значениями  $R_{\max}$  и  $R_{\min}$ . Периодически изменяющуюся функцию сопротивления, очевидно, можно разложить в ряд Фурье

$$R(t) = R_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R_k \cos(k\omega_1 t + \theta_k), \quad (10.3)$$

где  $\omega_1$  — основная частота изменения сопротивления, равная угловой скорости вращения или частоте переключений.

Вольт-амперная характеристика резистивного элемента с переменным сопротивлением:

$$u = R(t)i; \quad i = G(t)u \quad (10.4)$$

имеет коэффициенты — параметры, зависящие от времени. Это приводит к существенно иным свойствам элемента.

В частности, если элемент присоединен к источнику постоянного тока (напряжения), то напряжение (ток) на элементе согласно (10.3) будет переменным, содержащим все гармоники.

**Емкостный элемент** (рис. 10.1, а). Линейный емкостный элемент с переменной величиной емкости в любой фиксированный момент времени будет представляться линейной зависимостью между зарядом и напряжением — прямой, проходящей через начало координат (рис. 10.1, б). Угловой коэффициент прямой равен величине емкости для данного момента времени. Для других моментов времени в связи с изменением величины емкости получим другие прямые, которые будут

располагаться между двумя крайними прямыми, соответствующими максимальному и минимальному значениям емкости. Скорость вращательного движения прямой, изображающей характеристику, между крайними положениями определяется функцией  $C(t)$ .

Переменную емкость можно получить, например, путем механического вращения одной из пластин воздушного конденсатора, выполненных в виде полукругов. Изменением формы пластин удастся регулировать в некоторых пределах закон изменения емкости во времени. Можно также замыкать и размыкать с помощью ключей секции последовательно или параллельно соединенных конденсаторов; при этом емкость будет изменяться скачками между значениями  $C_{\max}$  и  $C_{\min}$ . На практике в качестве емкостных элементов с переменными параметрами часто используют барьерную емкость электронно-дырочного перехода, управляемую переменным напряжением смещения. При периодическом изменении параметра переменную емкость представляют рядом Фурье:

$$C(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega_1 t + \theta_k), \quad (10.5)$$

где  $\omega_1$  — основная частота изменения емкости.

К у л о н - в о л ь т н а я характеристика емкостного элемента с переменной емкостью имеет вид

$$q = q(t) = C(t)u. \quad (10.6)$$

Здесь как напряжение, так и емкость являются функциями времени. Поэтому связь между током и напряжением элемента выразится соотношением

$$i = \frac{dq}{dt} = C(t) \frac{du}{dt} + u \frac{dC(t)}{dt}. \quad (10.7)$$

Первое слагаемое обусловлено изменением напряжения, второе — изменением емкости во времени. Для емкости с постоянным параметром второе слагаемое равно нулю и характеристика элемента имеет вид, который принимался в теории линейных цепей с постоянными параметрами. Добавочное слагаемое, вызываемое изменением величины емкости, существенно изменяет характеристику элемента. В частности, в случае приложения к элементу постоянного напряжения первое слагаемое равно нулю, но в емкости имеется ток, пропорциональный скорости ее изменения. Следовательно, емкостный элемент с переменным параметром преобразует постоянное напряжение в переменный ток.



**Индуктивный элемент** (рис. 10.1, а). Характеристика линейного индуктивного элемента с переменными параметрами в различные фиксированные моменты времени будет представляться также семейством прямых, проходящих через начало координат плоскости  $i - \Psi$ . Угловые коэффициенты прямых равны величинам индуктивностей  $L(t_i)$ . Крайние прямые соответствуют максимальному и минимальному значениям индуктивностей.

Переменную индуктивность можно получить с помощью устройства из двух индуктивно связанных катушек, соединенных последовательно. Величину и знак индуктивной связи изменяют вращением подвижной катушки, помещаемой внутри неподвижной катушки. При периодическом изменении параметра переменную индуктивность можно представить рядом Фурье

$$L(t) = L_0 + \sum_{k=1}^{\infty} L_k \cos(k\omega_1 t + \theta_k), \quad (10.8)$$

где  $\omega_1$  — угловая скорость вращения подвижной катушки.

Вебер-амперная характеристика индуктивного элемента с переменной индуктивностью записывают как

$$\Psi(t) = L(t)i.$$

Здесь оба множителя зависят от времени. Связь между напряжением и током выражают соотношением

$$u = \frac{d\Psi}{dt} = L(t) \frac{di}{dt} + i \frac{dL(t)}{dt}. \quad (10.9)$$

Первое слагаемое обусловлено изменением тока, второе — изменением индуктивности во времени. В теории линейных цепей с постоянными параметрами имеют дело только с первым слагаемым характеристики. Если через элемент проходит постоянный ток, то первое слагаемое равно нулю, но на индуктивности появляется напряжение, пропорциональное скорости ее изменения. Индуктивность с переменным параметром преобразует постоянный ток в переменное напряжение.

*Цепь, составленная из линейных элементов и содержащая хотя бы один элемент с изменяющимся во времени значением параметра, является цепью с переменными параметрами или параметрической цепью.* Линейная параметрическая цепь описывается системой линейных дифференциальных и алгебраических уравнений, коэффициенты которых являются функциями времени.

Остановимся на некоторых общих свойствах цепей с переменными параметрами, связанных с линейностью па

раметров — их независимостью от значений токов и напряжений. Рассмотрение проведем на примере простейшей цепи из параллельно соединенных источника тока  $i_0(t)$ , резистивного элемента с проводимостью  $G(t)$  и емкостного элемента  $C(t)$  с переменной емкостью (рис. 10.1, в). Уравнение для напряжения на емкости, которое принимается за искомую реакцию

$$\frac{dq}{dt} + [G/C(t)] q = \frac{d}{dt} [C(t) u(t)] + G(t) u(t) = i_0(t), \quad (10.10)$$

представляет линейное уравнение с изменяющимися во времени коэффициентами.

Легко показать, что уравнения цепей с переменными параметрами (также как уравнения цепей с постоянными параметрами) обладает свойством линейности.

Примем нулевые начальные условия. Умножив левую и правую части приведенного уравнения на постоянную  $k$

$$\frac{d}{dt} [C(t) ku(t)] + G(t) ku(t) = ku_0(t),$$

получаем свойство однородности — увеличение действующего на входе цепи сигнала в  $k$  раз вызывает возрастание реакций также в  $k$  раз.

Если действующий на входе сигнал представить в виде суммы  $i_0 = i_{01} + i_{02}$ , то реакции цепи  $u_1$  и  $u_2$  на действие каждой из составляющих должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{d}{dt} [C(t) u_1(t)] + G(t) u_1(t) = i_{01};$$

$$\frac{d}{dt} [C(t) u_2(t)] + G(t) u_2(t) = i_{02}.$$

Суммирование уравнений

$$\frac{d}{dt} [C(t) (u_1 + u_2)] + G(t) (u_1 + u_2) = i_{01} + i_{02} = i_0$$

дает свойство аддитивности (наложения) — реакция на действие сигнала, состоящего из суммы составляющих, равна сумме реакций на действие каждой составляющей.

Свойство линейности — однородности и аддитивности также сохраняется по отношению к значениям реакции на действие начального напряжения в емкостном элементе или начального тока в индуктивности при отсутствии внешнего воздействия на входе цепи, т. е. в свободном режиме.

Полную реакцию линейной цепи с переменными параметрами при ненулевых начальных условиях и действии внешних

сигналов можно получить, как и для цепей с постоянными параметрами, наложением указанных реакций от сигнала на входе при нулевом состоянии цепи и от начального запаса энергии при нулевом воздействии.

Остановимся на импульсных реакциях или характеристиках линейных цепей с переменными параметрами, представляющих реакции цепей с нулевыми начальными условиями на действие сигнала в виде единичного импульса  $\delta(t)$ . Поскольку параметры цепи изменяются, то в отличие от цепей с постоянными параметрами, импульсная характеристика зависит от момента приложения импульсного воздействия относительно функции изменения параметра. Если импульсная характеристика с постоянными параметрами, соответствующая действию сигнала  $\delta(t)$ , равна  $h(t)$ , то действию импульса  $\delta(t - \tau)$ , приложенного при  $t = \tau$ , соответствует реакция  $h(t - \tau)$ , получающаяся простым смещением исходной реакции на время  $\tau$ : с м е щ е н и е в о з д е й с т в и я во времени приводит к с м е щ е н и ю р е а к ц и и без изменения ее формы. В случае же цепи с переменными параметрами импульсная характеристика  $h(t, \tau)$  является функцией как времени, так и момента приложения импульса. Для иллюстрации сказанного положим в (10.10)  $C(t) = C = 1$ ;  $G(t) = 1 + \cos t$ , так что уравнение цепи

$$\frac{du}{dt} + (1 + \cos t) u = i_0(t).$$

Это уравнение первого порядка допускает решение, которое при нулевых начальных условиях имеет вид

$$u = e^{-F} \int_0^t i_0(t) e^F dt,$$

$$\text{где } F = \int_0^t (1 + \cos t) dt = t + \sin t.$$

При действии единичного импульсного сигнала  $\delta(t - \tau)$  получаем на основе свойства выборки

$$\begin{aligned} u = h(t, \tau) &= e^{-(t + \sin t)} \int_0^t \delta(t - \tau) e^{(t + \sin t)} dt = \\ &= e^{-(t - \tau)} e^{-(\sin t - \sin \tau)} \delta_1(t - \tau). \end{aligned}$$

Как видим, импульсная реакция сложным образом зависит от запаздывания импульса — будет изменять свою форму с изменением  $\tau$ .

При действии ступенчатого напряжения решение рассматриваемого уравнения в элементарных функциях невозможно. Связь между переходной и импульсной характеристиками в параметрических цепях существенно усложняется.

Если в линейной цепи с постоянными параметрами импульсная реакция равна производной от реакции на ступенчатое воздействие, т. е. от переходной характеристики, то в цепи с переменными параметрами такой простой связи между характеристиками не существует.

В силу отмеченных свойств — однородности и аддитивности линейных цепей с переменными параметрами при нулевых начальных условиях, при действии сигнала  $f_1(t)$  произвольной формы можно использовать интеграл наложения (свертку). С учетом зависимости импульсной характеристики от момента приложения импульса интеграл наложения для искомой реакции имеет следующий вид:

$$f_2(t) = \int_{0-}^t h(t, \tau) f_1(\tau) d\tau.$$

## § 10.2. Преобразование частоты в параметрической цепи

Поскольку реакция элемента с переменным параметром выражается нелинейной операцией — произведением двух функций времени (тока или напряжения на элементе и параметра, зависящего от времени), свойства параметрических цепей получаются во многом схожими со свойствами нелинейных цепей.

На практике линейный элемент с переменным параметром часто получают с помощью нелинейного элемента, подавая на него переменное напряжение (ток) смещения или накачки. В результате перемещения рабочей точки по нелинейной характеристике при действии переменного напряжения накачки достаточной величины происходит изменение параметра нелинейного элемента. Частота процесса накачки, изменяющего параметр элемента, равна  $\omega_2 = 2\omega_1/n$ , где  $\omega_1$  — частота приложенного к цепи сигнала, подлежащего преобразованию.

Для входного сигнала с малой амплитудой, не влияющего на изменение параметра элемента, режим получается линейным. Действие сигнала на элемент с переменным параметром вызывает колебания с комбинационными частотами.

Рассмотрим некоторые примеры преобразований частот и их применения, а также частотно-энергетические соотношения в параметрической цепи.

**Преобразование спектра.** Если к резистивному элементу, проводимость которого изменяется периодически по закону

$$G(t) = G_0 + \sum_{k=1}^{\infty} G_k \cos k\omega_1 t, \quad (10.11)$$

приложено постоянное напряжение  $U$ , то ток в элементе

$$i = G(t) U = G_0 U + \sum_{k=1}^{\infty} G_k U \cos k\omega_1 t.$$

Ток состоит из постоянной и переменной составляющих, содержащих все гармоники основной частоты изменения параметра элемента. Следовательно, *цепь с переменными параметрами производит преобразование спектра*: линия нулевой частоты входного сигнала преобразуется в линии частот, кратных основной частоте изменения параметра.

Если к элементу с проводимостью (10.11) приложить синусоидальное напряжение

$$u_0 = U_m \cos \omega_0 t,$$

то ток в элементе

$$\begin{aligned} i = G(t) u_0 &= G_0 U_m \cos \omega_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} G_k U_m \cos \omega_0 t \cos k\omega_1 t = \\ &= G_0 U_m \cos \omega_0 t + \frac{U_m}{2} \sum_{k=1}^{\infty} G_k \cos (\omega_0 + k\omega_1) t + \\ &+ \frac{U_m}{2} \sum_{k=1}^{\infty} G_k \cos (\omega_0 - k\omega_1) t. \end{aligned}$$

Ток состоит из гармонической составляющей пропорциональной входному сигналу, и гармонических составляющих с частотами, равными суммам и разностям частоты входного сигнала и частот переменной проводимости. *Выходная реакция содержит частоты, которых нет в действующем сигнале и переменном параметре цепи.*

Следует обратить внимание на то, что в приведенных выражениях токов амплитуды гармоник пропорциональны амплитудам действующего на входе сигнала. В этом проявляется свойство линейности элемента.

**Амплитудная модуляция.** Цепь с переменными параметрами позволяет осуществить амплитудную модуляцию. Модулированный сигнал, как было указано в § 3.5, состоит из произ-

ведения низкочастотного модулирующего сигнала (оггибающей) и гармонического колебания высокой (несущей) частоты:

$$f(t) = A(t) \cos \omega_0 t = [1 + \mu a(t)] \cos \omega_0 t, \quad (10.12)$$

где  $A(t) = 1 + \mu a(t)$ ;  $\mu$  — глубина модуляции.

Приведенное перемножение двух функций можно получить с помощью резистивного элемента, проводимость которого изменяется по закону модулирующей функции:

$$G = G(t) = 1 + \mu a(t).$$

При подключении такого элемента к источнику синусоидального напряжения

$$u = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha_u)$$

ток  $i = G(t)u$  будет изменяться по закону (10.12) модулированного сигнала.

**Детектирование с помощью цепи с переменным параметром (синхронное детектирование).** Цепь с переменными параметрами позволяет произвести детектирование амплитудно-модулированного сигнала, которое состоит в выделении из колебания (10.12) низкочастотной огибающей. Если напряжение амплитудно-модулированного сигнала приложено к резистивному элементу, проводимость которого изменяется по закону гармонической функции с частотой, равной несущей частоте действующего на входе колебания:

$$G(t) = G_0 [1 + \cos(\omega_0 t + \theta)],$$

то ток в цепи

$$\begin{aligned} i &= G(t)u = G_0 A(t) [1 + \cos(\omega_0 t + \theta)] \cos \omega_0 t = \\ &= G_0 A(t) \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} G_0 A(t) \cos(2\omega_0 t + \theta) + \frac{1}{2} G_0 A(t) \times \\ &\times \cos \theta. \end{aligned} \quad (10.13)$$

В токе содержатся колебания несущей и удвоенной несущей частот и низкочастотное колебание, пропорциональное огибающей. С помощью фильтра нижних частот нетрудно выделить модулирующий сигнал

$$f_1(t) = \frac{1}{2} G_0 A(t) \cos \theta,$$

значение которого, как видим, зависит от фазового угла.

**Частотно-энергетические соотношения.** Ввиду трудностей количественного анализа цепей с переменными параметрами большое значение имеют методы качественного исследования. Важные качественные заключения о процессах в цепи с переменными параметрами можно сделать на основе рассмотрения распределения мощностей по отдельным колебаниям различ-

ных частот. Энергия, поступающая на частотах колебаний сигналов источников, присоединенных к нелинейному элементу, преобразуется в энергии колебаний всех частот, которые возникают в цепи. Соотношения мощностей в колебаниях различных частот рассмотрим на примере типичной параметрической схемы преобразования частоты с нелинейной емкостью (рис. 10.2, а).

В качестве нелинейного элемента обычно используется барьерная емкость обратного смещенного перехода полупроводникового диода, к которому прикладывается через узкополосный фильтр синусоидальное напряжение источника накачки  $u_2(t)$ , играющее доминирующую роль в цепи. Она определяет совместно с напряжением смещения для заданной характеристики  $q(u)$  изменение заряда во времени и, следовательно, изменение емкости

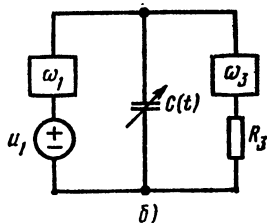
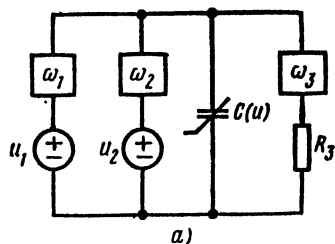


Рис. 10.2

$$C(t) = \frac{q(t)}{u(t)} = \frac{C_0}{1 + \mu \cos(\omega_2 t + \varphi_2)}, \quad (10.14)$$

где  $C_0$  — емкость при  $\mu = 0$ ,  $\mu = (\Delta C/C_0) \ll 1$  — глубина модуляции емкости.

Чем больше глубина модуляции, тем большая мощность вносится от источника накачки в

цепь. Ветви источника накачки и нелинейной емкости можно заменить переменной емкостью  $C(t)$  (рис. 10.2, б).

Малое приращение синусоидального напряжения источника сигнала с частотой  $\omega_1$ , присоединенного к цепи также через узкополосный фильтр, почти не влияет на величину переменной емкости, но, взаимодействуя с ней, создает колебания с частотами  $\omega_{1n} = \omega_1 + n\omega_2$ . Сопротивления идеальных двухполосных фильтров типа последовательных резонансных контуров без потерь равны нулю при  $\omega = \omega_1$  и бесконечности при  $\omega \neq \omega_1$ . Наличие фильтров, ограничивая число частот колебаний, существенно облегчает анализ: в нелинейной емкости возможны колебания только трех частот:  $\omega_1$  — источника сигнала,  $\omega_2$  — источника накачки,  $\omega_3 = \omega_1 + n\omega_2$  — комбинационной частоты, отбираемой в нагрузку.

Будем рассматривать среднюю за период (активную) мощность  $P_i$  колебания частоты  $\omega_i = 2\pi/T_i$ , с которой связана

энергия

$$W_i = P_i T_i = 2\pi P_i / \omega_i. \quad (10.15)$$

Средняя за период мощность колебаний трех частот в нелинейной емкости равна нулю. Поэтому с учетом (10.15) и соотношения  $\omega_3 = \omega_1 + n\omega_2$  имеем

$$\begin{aligned} 2\pi (P_1 + P_2 + P_3) &= \omega_1 W_1 + \omega_2 W_2 + \omega_3 W_3 = \\ &= \omega_1 (W_1 + W_3) + \omega_2 (W_2 + nW_3) = 0. \end{aligned}$$

Равенство должно быть справедливым при любых значениях частот. Полагая  $\omega_2 \rightarrow 0$  (при  $\omega_1 \neq 0$ ) и затем  $\omega_1 \rightarrow 0$  (при  $\omega_2 \neq 0$ ), приходим к выводу, что оба слагаемых независимо друг от друга должны обращаться в нуль. Равенства нулю слагаемых при учете (10.15) дают соотношения для мощностей колебаний различных частот:

$$\left. \begin{aligned} P_1/\omega_1 + P_3/(\omega_1 + n\omega_2) &= 0; \\ P_2/\omega_2 + nP_3/(\omega_1 + n\omega_2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.16)$$

В общем случае, когда в нелинейном реактивном элементе существует бесконечное число колебаний всех комбинационных частот  $\omega_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2$ , выражения (10.16) для соответствующих мощностей  $P_{mn}$  приобретают вид

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{mP_{mn}}{m\omega_1 + n\omega_2} &= 0; \\ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{nP_{mn}}{m\omega_1 + n\omega_2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.17)$$

Эти соотношения, выражающие содержание теоремы Мэнли—Роу, позволяют установить условия, при которых возможно усиление мощности в цепи.

Принято знаки мощностей ветви  $i$  определять по тому, чем является для нее нелинейная емкость — нагрузкой или источником. В первом случае полагают  $P_i > 0$ , во втором  $P_i < 0$ . Для мощностей, входящих в (10.16), очевидно, имеем:  $P_1 > 0$ ,  $P_2 > 0$  и  $P_3 < 0$ .

### § 10.3. Об анализе цепей с переменными параметрами

Процессы в цепях, содержащих элементы с переменными параметрами, описываются, дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами. Общего метода решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициента-



ми не существует. Поэтому анализ цепей с переменными параметрами в общем случае очень затруднен. Только с помощью численного метода интегрирования можно получить решение конкретных цепей с переменными параметрами. Здесь можно применить те же алгоритмы (см. § 7.3), которые используются при анализе нелинейных цепей. Для применения численного метода необходимо составить систему уравнений цепи через переменные состояния.

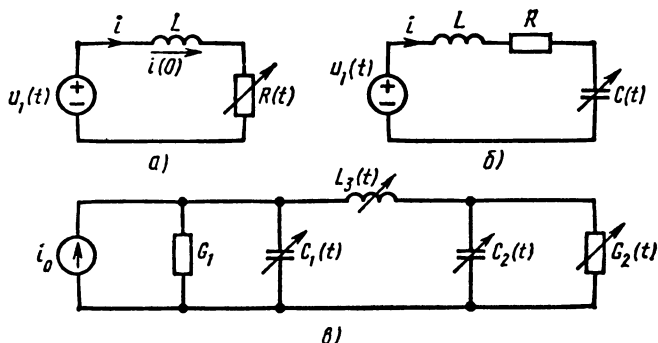


Рис. 10.3

Рассмотрим уравнения простейших контуров первого и второго порядков, содержащих один линейный элемент с переменным параметром. На этих примерах покажем некоторые особенности уравнений и убедимся в том, что уравнения состояния линейных цепей с переменными параметрами можно составлять так же, как для линейных цепей с постоянными параметрами. В заключение остановимся на применении частотного метода.

**Последовательный  $RL$ -контур.** На рис. 10.3, *a* изображена цепь, состоящая из последовательно соединенных источников ступенчатого напряжения, постоянной индуктивности  $L = 1$  с начальным током  $i(0) = I_0 = 1$  и переменного резистивного элемента с сопротивлением

$$R(t) = 2 + \cos t.$$

Уравнение равновесия напряжений в цепи записывают в виде:

$$di/dt + (2 + \cos t)i = u_1 = \delta_1(t).$$

Коэффициент при токе является периодической функцией времени. Аналитически через элементарные функции уравнение не решается. Можно получить численное решение, ис-

пользуя, например, алгоритм Эйлера и ЦВМ. Качественно можно ожидать, что после затухания переходной составляющей в цепи установится периодический ток, определяемый изменением величины сопротивления.

Рассмотрим свободный режим при отключенном источнике, описываемый уравнением

$$di/dt + (2 + \cos t)i = 0.$$

Переменные здесь разделяются

$$di/i = -(2 + \cos t)dt.$$

Решением уравнения будет

$$\ln i = -(2t + \sin t) + k; \quad i = I_0 e^{-(2t - 0.5 \sin t)}.$$

Ток затухает от начального значения до нуля.

**Последовательный RLC-контур.** На рис. 10.3, б изображена цепь, состоящая из последовательно соединенных источника напряжения, индуктивности, сопротивления и емкости с переменным параметром вида (10.14).

Составим уравнения состояния, приняв в качестве переменных заряд в емкости и потокосцепление в индуктивности. Такой выбор переменных необходим при наличии в общем случае реактивных элементов с разрывными переменными параметрами, так как возможны скачки напряжения на емкости и тока в индуктивности. Все остальные величины должны быть выражены через потокосцепления индуктивностей и заряды емкостей. Для рассматриваемой цепи уравнения состояния можно записать непосредственно по схеме:

$$\left. \begin{aligned} dq/dt = i = \Psi/L; \\ \frac{d\Psi}{dt} = -u_C - u_R + u_1 = -\frac{q}{C(t)} - \frac{\Psi}{L}R + u_1. \end{aligned} \right\}$$

Из приведенного примера можно сделать вывод: уравнения состояния линейной цепи с переменными параметрами составляются так же, как и для линейных цепей с постоянными параметрами, лишь в самом конце вместо постоянных параметров следует подставить переменные параметры  $R(t)$ ,  $L(t)$  и  $C(t)$ . Как указывалось, решение системы уравнений можно получить численными методами. При отсутствии сигнала на входе система уравнений с учетом выражения  $C(t)$  запишем таким образом:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{\Psi}{L}; \\ \frac{d\Psi}{dt} &= -\frac{q}{C_0} [1 + \mu \cos(\omega_2 t + \varphi_2)] - \frac{\Psi}{L}R. \end{aligned}$$

Приведем систему к одному уравнению второго порядка относительно заряда емкостного элемента. Продифференцировав первое уравнение, исключим потокосцепление с помощью второго уравнения:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q [1 + \mu \cos(\omega_2 t + \varphi_2)] = 0,$$

где  $\omega_0^2 = 1/LC_0$ .

Введя нормированное время  $\omega_2 t = \tau$ ;  $t = \tau/\omega_2$ , получим

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} + 2\alpha \frac{dq}{d\tau} + \left(\frac{\omega_0}{\omega_2}\right)^2 [1 + \mu \cos(\tau + \varphi_2)] q = 0, \quad (10.18)$$

где  $2\alpha = R/\omega_2 L$ .

При отсутствии потерь в контуре ( $\alpha = 0$ ) уравнение получается типа уравнения Матье с периодически изменяющимся коэффициентом:

$$d^2 q/d\tau^2 + (a + 2\delta \cos \tau) q = 0, \quad (10.19)$$

где  $a = (\omega_0/\omega_2)^2$ ;  $2\delta = \mu a$ .

Путем преобразований и подстановок уравнение цепи с потерями также можно привести к уравнению Матье. Решение уравнения Матье выражается через табулированные функции (функции Матье).

**Разветвленная цепь.** На рис. 10.3, в приведена цепь третьего порядка, присоединенная к источнику тока. Параметры всех элементов, кроме  $G_1$ , примем зависящими от времени. В качестве переменных состояния удобно принимать заряды емкостей и потокосцепления индуктивностей, представляющие непрерывные функции времени; при этом в выражения уравнений не будут входить производные от значений емкостей и индуктивностей, которые появляются при выборе в качестве переменных  $u_C$  и  $i_L$ .

Из условия равновесия токов в узлах 1 и 2 имеем

$$i_{C1} = \frac{dq_1}{dt} = -G_1 q_1/C_1(t) - \psi/L(t) + i_0;$$

$$i_{C2} = \frac{dq_2}{dt} = -G_2(t) q_2/C_2(t) + \psi/L(t).$$

Уравнение равновесия напряжений в контуре с индуктивностью

$$u_L = \frac{d\psi}{dt} = u_{C1} - u_{C2} = q_1/C_1(t) - q_2/C_2(t).$$

## Уравнения состояния в матричной форме

$$\begin{array}{c} \dot{\varphi} \\ \psi \end{array} = \begin{array}{cc} 0 & -1/L(t) \\ 0 & 1/L(t) \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} + \begin{array}{cc} -G_3/C_2(t) & 1/L(t) \\ 1/C_1(t) & -1/C_2(t) \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}$$

Элементы матрицы цепи, как видим, являются функциями времени.

**Применение частотного метода.** Наибольший практический интерес представляет анализ установившегося режима при периодическом изменении параметра и действии гармонического сигнала.

Если в линейной цепи имеется один элемент с периодически изменяющимся параметром и один источник гармонического сигнала, то можно предсказать частоты установившихся колебаний. Наиболее эффективным методом нахождения амплитуд и фаз колебаний в этом случае является метод комплексных амплитуд. При использовании этого метода необходимо ввести комплексные амплитуды и через них выразить значения искомой периодической реакции, входного гармонического сигнала и переменного параметра.

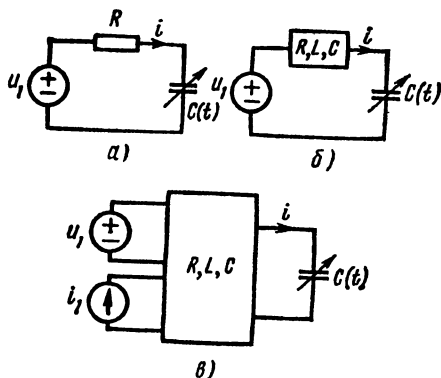


Рис. 10.4

Применение метода комплексных амплитуд рассмотрим на примере установившегося режима в цепи (рис. 10.4, а), состоящей из последовательно соединенных резистора  $R$  и конденсатора переменной емкости, изменяющейся периодически по закону (10.14), и подключенной к источнику с напряжением

$$u_1 = U \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \quad (10.20)$$

Уравнение равновесия напряжений в цепи записывается в виде

$$Ri + C^{-1}(t) \int idt = Ri + \frac{1}{C_0} \int idt + \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \int idt = U \cos(\omega_1 t + \alpha_1). \quad (10.21)$$

Представим гармонически изменяющееся приращение обратной емкости через экспоненты от мнимого аргумента:

$$\Delta C^{-1}(t) = \frac{\dot{\mu}}{2} e^{j\omega_2 t} + \frac{\mu^*}{2} e^{-j\omega_2 t}, \quad (10.22)$$

где  $\dot{\mu} = \mu e^{j\psi_2}$ , а также напряжение источника и искомый ток, состоящий из гармонических колебаний с частотами  $\omega_{1n} = \omega_1 + n \omega_2$  через комплексные амплитуды:

$$u = \operatorname{Re} \dot{U} e^{j\omega_1 t}; \quad i = \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_{1n} e^{j\omega_{1n} t}. \quad (10.23)$$

Подстановка (10.22) и (10.23) в (10.21) в соответствии с методом комплексных амплитуд после преобразований дает

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R I_{1n} e^{j\omega_{1n} t} + \frac{\dot{\mu}}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{j\omega_{1n} C} I_{1n} e^{j(\omega_{1n} + \omega_2) t} + \\ + \frac{\mu^*}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{j\omega_{1n} C} I_{1n} e^{j(\omega_{1n} - \omega_2) t} = \dot{U} e^{j\omega_1 t}. \end{aligned}$$

Приравняв коэффициенты при экспонентах с одинаковыми частотами, получим систему из бесконечного числа уравнений для токов различных частот:

$$\left. \begin{aligned} & \dots \dots \dots \\ R I_{1(-1)} + \frac{\dot{\mu}}{2} \cdot \frac{1}{j\omega_{1(-2)} C} I_{1(-2)} + \frac{\mu^*}{2} \cdot \frac{1}{j\omega_1 C} I_{10} &= 0; \\ R I_{10} + \frac{\mu}{2} \cdot \frac{1}{j\omega_{1(-1)} C} I_{1(-1)} + \frac{\mu^*}{2} \cdot \frac{1}{j\omega_{1n} C} I_{11} &= \dot{U}; \\ R I_{11} + \frac{\dot{\mu}}{2} \cdot \frac{1}{j\omega_1 C} I_{10} + \frac{\mu^*}{2} \cdot \frac{1}{j\omega_{12} C} I_{12} &= 0. \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (10.24)$$

Решение этой системы в общем виде возможно только при ограниченном числе частот колебаний, определяемом наличием фильтров.

Рассмотренную простейшую цепь легко обобщить на более сложный случай, если последовательный резистивный элемент заменить любым двухполюсником с постоянными параметрами и комплексным сопротивлением  $Z(j\omega)$ . В частности, если двухполюсник состоит из последовательно соединенных

элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$  (рис. 10.4, б), то его комплексное сопротивление для частоты  $\omega_{1n}$  равно

$$Z_{1n} = R + j(\omega_{1n}L - 1/\omega_{1n}C). \quad (10.25)$$

Для получившегося колебательного контура с переменной емкостью, обладающего избирательностью, можно пренебречь составляющими, частоты которых отличаются от резонансной частоты  $\omega_0$ . Если контур настроен в резонанс ( $\omega_1 \approx \omega_0$ ) и частота накачки  $\omega_2 = 2\omega_1$ , то следует учесть колебания с частотами  $\omega_1$  и  $|\omega_{1(-1)}| = |\omega_1 - \omega_2| = \omega_1 \approx \omega_0$ . Для комплексных амплитуд двух токов с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_{1(-1)}$  уравнения (10.24) при учете (10.25) можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} Z_{1(-1)} \dot{I}_{1(-1)} + \frac{\dot{\mu}}{2} \cdot \frac{1}{j\omega_1 C} \dot{I}_{10} &= 0; \\ Z_{10} \dot{I}_{10} + \frac{\dot{\mu}}{2} \cdot \frac{1}{j\omega_{1(-1)} C} \dot{I}_{1(-1)} &= \dot{U}, \end{aligned} \right\} \quad (10.26)$$

где

$$\begin{aligned} Z_{1(-1)} &= R + j(\omega_{1(-1)}L - 1/\omega_{1(-1)}C); \quad Z_{10} = \\ &= R + j(\omega_{10}L - 1/\omega_{10}C). \end{aligned}$$

Решая эту систему относительно комплексных амплитуд токов частоты  $\omega_1$  сигнала и комбинационной частоты, можно выяснить условия усиления, а также частотные характеристики контура.

К цепи рис. 10.4, а согласно теореме об эквивалентном источнике можно свести более сложную цепь, содержащую произвольную линейную подцепь (рис. 10.4, б) с постоянными параметрами и несколькими источниками гармонических сигналов одинаковой частоты  $\omega_1$ .

## § 10.4. О параметрическом возбуждении колебаний

Для лучшего выяснения наиболее важных свойств параметрических цепей, связанных с условиями преобразования энергии, именно с условиями внесения энергии в цепь от источника накачки, рассмотрим качественно процесс возбуждения колебаний в контуре с периодически изменяющейся емкостью.

Если реактивный элемент с переменным параметром подключается к источнику напряжения или тока, то энергия в цепь может поступать не только от этих источников, но также от источника накачки или иных сил, вызывающих изменение параметра цепи. Эта энергия запасается в реактивном элементе в течение некоторого интервала времени и затем в следую-

щем интервале отдается как источнику действующего сигнала, так и источнику накачки. Энергетический процесс в цепи с переменной реактивностью получается более сложным, чем в цепи с постоянной реактивностью из-за дополнительного обмена энергией между элементом или цепью и силами, изменяющими параметр реактивности.

Рассмотрим энергетические процессы применительно к емкостному элементу, параметр которого изменяется периодически скачками. Для наглядности примем, что изменение емко-

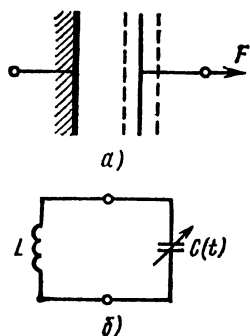


Рис. 10.5

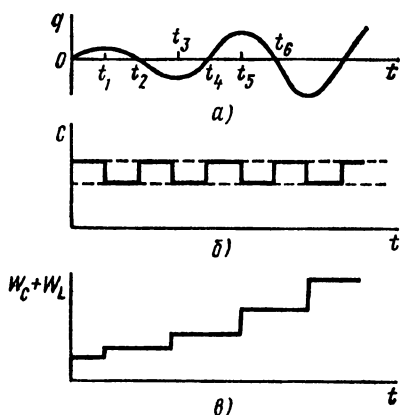


Рис. 10.6

сти происходит за счет изменения расстояния между пластинами воздушного конденсатора под действием механической силы. На рис. 10.5, а показан плоский конденсатор, одна пластина которого неподвижна (закреплена), а другая может перемещаться под действием приложенных к ней механической силы  $F$  и электростатической силы притяжения разноименных зарядов пластин. В любой момент времени при любом положении подвижной пластины обе силы должны уравнивать друг друга. Если при наличии заряда и электрического поля пластины раздвигаются, то внешняя сила совершает работу против электростатической силы притяжения разноименных зарядов и при этом энергия вносится в емкостный элемент. Если же пластины сближаются то совершают работу электростатические силы — при этом энергия выносится из цепи. Очень существенный момент здесь состоит в том, что работа, совершаемая при изменении расстояния между пластинами, определяется величиной заряда: *если заряд максимален, то независимо от полярности работа и энергия будут максимальными; если же заряд равен нулю, то при перемещении пластин рабо-*

та и энергия также равны нулю; так как сила притяжения отсутствует.

Процесс обмена энергией между запасующим энергию элементом с переменным параметром и внешней силой позволяет осуществить накачку энергии в цепь за счет внешней силы. Для получения накачки энергия, вносимая за счет работы внешней силы, должна быть больше энергии, выносимой за счет работы электростатической силы. Накачку можно получить в режиме переменного заряда, если изменение емкости производить синхронно с изменением заряда, а именно: *уменьшать емкость* (раздвигать пластины) *вблизи максимума заряда* и *увеличивать емкость* (сближать пластины) *вблизи нулевого значения заряда*.

Чтобы получить в элементе переменный заряд при отсутствии источника сигнала (в свободном режиме), рассматриваемую емкость следует включить последовательно с индуктивностью (рис. 10.5, б). На рис. 10.6, а изображена кривая изменения заряда во времени. Начальная часть кривой в интервале  $0 - t_1$  может быть вызвана флуктуациями тока в контуре. Для получения максимальной накачки следует в момент времени  $t_1$  уменьшить емкость (рис. 10.6, б) — при этом произойдет увеличение энергии в контуре. В соответствии с колебательным режимом контура заряд, уменьшаясь, при  $t = t_2$  проходит через нуль: энергия в емкости равна нулю — вся энергия сосредоточена в индуктивности. Если в этот момент сблизить пластины, то энергия в цепи не изменится. Следующее уменьшение емкости следует произвести в момент  $t_3$  отрицательного максимума заряда, величина которого больше предыдущего максимума за счет внесенной при  $t = t_2$  дополнительной энергии. При каждом скачкообразном уменьшении емкости вблизи максимальных значений заряда в цепь также скачком вносится энергия; в интервалах между указанными процессами при отсутствии потерь в контуре значение энергии постоянно (рис. 10.6, в). В рассматриваемом контуре без потерь величина заряда, очевидно, будет неограниченно увеличиваться с нарастающей скоростью, поскольку с увеличением заряда вносимая на каждом шаге энергия возрастает.

При учете потерь в контуре скорость нарастания колебаний будет замедляться. Очевидно, нарастание колебаний возможно, если энергия, поступающая в емкость за полупериод от источника накачки и определяемая приращением емкости  $|\Delta C|$ , превышает потери энергии в сопротивлении  $R$  за полупериод:

$$\frac{1}{2} |\Delta C| U_m^2 \geq \frac{1}{2} R I_m^2 T/2; \quad \frac{|\Delta C|}{C} \geq \pi \omega_2 RC \approx \pi/Q, \quad (10.27)$$



где  $I_m = \omega_2 C U_m$  — амплитудное значение тока;  $Q \approx 1/\omega RC$  — добротность контура.

Возбуждение нарастающих колебаний означает неустойчивость линейного режима в параметрическом контуре, описываемом уравнением Матье (10.19).

При больших амплитудах колебаний цепь нельзя считать линейной — необходимо учитывать нелинейные характеристики емкости и сопротивления запирающего слоя  $p$ - $n$ -перехода, которые уменьшают скорость нарастания колебаний и приводят к установлению стационарных колебаний.

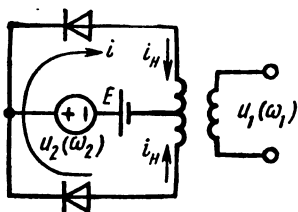


Рис. 10.7

Хотя в режиме возбуждения колебаний заряд является непрерывной функцией, напряжение  $u_c = q/C(t)$  на емкости должно испытывать скачки в местах скачкообразного изменения емкости.

Принятое для удобства скачкообразное изменение емкости дает наиболее эффективную накачку, но требует в моменты скачков ввода от источника бесконечной мощности.

Обычно изменение емкости происходит по гармоническому закону, менее эффективному в смысле накачки.

Режим накачки существенно зависит от фазы колебаний. Если максимумы напряжения сдвигаются относительно моментов спада емкости, то вводимая энергия уменьшается. При угле сдвига фазы  $90^\circ$ , когда емкость возрастает в моменты максимумов напряжения, энергия выводится из контура и колебания в нем будут затухать. Но при угле сдвига фазы  $180^\circ$  в силу независимости энергии от знака напряжения процесс возбуждения колебаний не изменится. Следовательно, в контуре в зависимости от знака начального тока, задаваемого управляющим импульсом, возможно возбуждение колебаний с начальными фазами 0 или  $180^\circ$ . Это явление используется в двоичном устройстве, называемом параметроном.

Принятая нами максимально возможная частота накачки (изменения емкости), в два раза большая частоты колебаний, обеспечивает поступление максимального количества энергии при заданной глубине модуляции. Частота накачки может быть выбрана в  $n$  раз меньшей максимального значения:

$$\omega_2 = \frac{1}{n} \omega_{2 \max} = \frac{2\omega_i}{n} \quad (10.28)$$

с соответственным уменьшением количества поступающей за полупериод энергии.

На рис. 10.7 изображена принципиальная схема параметрического генератора на двух полупроводниковых встречно включенных диодах. На входе последовательно с источником смещения  $E$  включен источник накачки с переменным напряжением  $u_2 (\omega_2)$ . Применение балансной схемы позволяет без специальных устройств избавляться от появления колебания накачки на выходе — действия колебаний тока  $i_n$  в обеих частях схемы взаимно компенсируются в двух первичных обмотках трансформатора. На вторичной обмотке трансформатора появляются колебания тока  $i$ , возбужденные в контуре из переменной емкости  $C(t)$  последовательно соединенных диодов и индуктивности обмоток. В параметрическом генераторе энергия источника накачки с частотой  $\omega_2$  преобразуется в колебания с частотой  $\omega_1 = n\omega_2/2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

### § 10.5. О параметрическом усилении колебаний

Изложим кратко принцип действия параметрических усилителей, нашедших широкое применение на практике вследствие малых собственных шумов. В параметрическом усилителе энергия источника накачки преобразуется в энергию усиливаемого сигнала — слабый входной сигнал управляет этим процессом.

Рассмотрим двухконтурную схему параметрического усилителя (см. рис. 10.2, б). Соотношения (10.16). Мэнли—Роу показывают, что отношения мощностей колебаний в контуре с идеальными характеристиками определяются отношениями частот контуров, а при заданной частоте  $\omega_1$  входного сигнала — частотой  $\omega_3 = \omega_1 + n\omega_2$  выходного («холостого») контура. Усиление, как видим, связано с преобразованием частоты. Остановимся на двух возможных видах преобразования.

1. Преобразование «вверх» с повышением частоты входного сигнала:  $\omega_3 = \omega_1 + n\omega_2 > \omega_1$  ( $n > 0$ ). Согласно (10.16) коэффициент усиления мощности

$$K = \frac{|P_3|}{P_1} = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{\omega_1 + n\omega_2}{\omega_1} > 1$$

определяется отношением частот колебаний на выходе и входе. Обычно принимают  $n = 1$ , и для получения достаточного усиления должно выполняться условие  $\omega_2 \gg \omega_1$ . Усиление мощности происходит за счет преобразования мощности источника накачки в мощность комбинационного колебания, которая намного превышает мощность входного управляющего сигнала. Достоинством данного вида преобразования является его устойчивость — самовозбуждение колебаний здесь ис-

ключается: накачка не влияет на входной сигнал. Но неизбежное чрезмерное повышение частоты входного сигнала не всегда бывает желательным, что является недостатком преобразования «вверх».

2. Преобразование «вниз» с понижением частоты и усилением входного сигнала. Для получения усиления мощности необходимо иметь  $n < 0$ , в частности  $n = -1$ . Тогда частота колебаний на выходе

$$\omega_3 = \omega_1 + n\omega_2 = \omega_1 - \omega_2 < 0. \quad (10.29)$$

Частота накачки в этом случае  $\omega_2 > \omega_1$ . Абсолютное значение  $\omega_3$ , являющееся частотой колебания на выходе,  $|\omega_3| = = |n|\omega_2 - \omega_1$ .

При учете знаков  $\omega_3 < 0$ ,  $n\omega_2 < 0$  согласно (10.16) должен измениться знак мощности входного сигнала:  $P_1 < 0$ . Это означает, что при преобразовании «вниз» энергия источника накачки преобразуется не только в энергию выходного сигнала, но также в энергию входного сигнала. Подобный режим, называемый регенеративным, можно учесть введением в ветви 1 и 3 отрицательных сопротивлений. В рассматриваемом способе усиление мощности не связано жестко с отношением частот, а зависит от интенсивности процесса преобразования энергии источника накачки в энергию выходного сигнала. Но при некоторой критической интенсивности может нарушиться устойчивость: цепь перейдет в автоколебательный режим самовозбуждения колебаний. В этом состоит недостаток рассмотренного вида преобразования.

Двухконтурные схемы параметрического усиления применяются в тех случаях, когда частоты входного и выходного (комбинационного) колебаний различны и, следовательно, требуются два фильтра. Если в качестве выходной выбрана комбинационная частота  $\omega_3 = \omega_2 - \omega_1$ , то ее величина может быть принята близкой к входной частоте  $\omega_2 - \omega_1 \approx \omega_1$ , когда частота накачки  $\omega_2 \approx 2\omega_1$ . При этом отпадает необходимость в специальном выходном контуре, достаточно иметь один входной контур, в котором существуют два колебания, усиленные за счет энергии источника накачки («регенеративного» эффекта). При частоте накачки  $\omega_2 \approx 2\omega_1$  получим синхронный режим с одним колебанием.

Следует отметить, что рассмотренные параметрические устройства применяются в основном на сверхвысоких частотах. В качестве контуров узкополосных фильтров в них используются обычно отрезки кабелей или волноводов.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В данной книге изложены начальные сведения по теории нелинейных электрических цепей, необходимые для будущей инженерной деятельности, изучения специальных дисциплин и чтения литературы с целью углубления знаний и овладения новыми вопросами, что совершенно необходимо в век быстрого развития всех областей радиоэлектроники и электротехники.

Отсутствие в математике достаточно общих методов решения нелинейных уравнений, а также уравнений с переменными коэффициентами существенно затрудняет исследование свойств и анализ процессов в нелинейных цепях и цепях с переменными параметрами. Только с помощью численных методов удастся определять реакции конкретных цепей с численно заданными параметрами и воздействиями.

Трудность выявления разнообразия свойств нелинейных цепей связана с богатством и непредсказуемостью явлений, которые могут наблюдаться в них. Этим же объясняется факт очень широкого применения на практике нелинейных устройств.

Для приближенного анализа и исследования процессов в нелинейной цепи необходимо из-за отсутствия общего подхода привлекать по возможности ряд приемов. Для этого очень важно знать и уметь применять как изложенные в книге, так и другие методы, имеющиеся в современной литературе, часть из которой приведена в списке литературы.

## ЛИТЕРАТУРА

### Учебники

1. Атабеков Г. И. и др. Теоретические основы электротехники. Ч. 2. — М.: Энергия, 1979.
2. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. — М.: Высш. школа, 1983.
3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Ч. 1, 2. — М.: Высш. школа, 1978.
4. Ионкин П. А. и др. Теоретические основы электротехники. Т. II. — М.: Высш. школа, 1976.
5. Кушнир В. Ф., Ферсман Б. А. Теория нелинейных электрических цепей. — М.: Связь, 1974.
6. Нейман Л. Р., Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники. Т. 2. — Л.: Энергия, 1981.

### Учебные пособия и монографии

1. Андронов А. А. и др. Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959.
2. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории колебаний. — М.: Наука, 1974.
3. Данилов Л. В. Электрические цепи с нелинейными  $R$ -элементами. — М.: Связь, 1974.
4. Ионкин П. А. и др. Основы инженерной электрофизики. М.: Высш. школа, 1972.
5. Каннингхем В. Введение в теорию нелинейных систем/Пер. с англ. — М.: Госэнергоиздат, 1962.
6. Колосов С. П., Сидоров Ю. А. Нелинейные двухполосники и четырехполосники. — М.: Высш. школа, 1981.
7. Конторович М. И. Нелинейные колебания в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1973.
8. Мигулин В. В. и др. Основы теории колебаний. — М.: Наука, 1978.
9. Самойло К. А. Метод анализа колебательных систем второго порядка. — М.: Наука, 1978.
10. Синицкий Л. А. Элементы качественной теории нелинейных электрических цепей. — Львов: Вища школа, 1975.
11. Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах/Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1952.
12. Филиппов Е. Нелинейная электротехника/Пер. с нем. — М.: Энергия, 1968.
13. Харкевич А. А. Нелинейные и параметрические явления в радиотехнике. — М.: Гостехиздат, 1956.
14. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах/Пер. с англ. — М.: Мир, 1969.
15. Хьюз В. Л. Нелинейные электрические цепи/Пер. с англ. — М.: Энергия, 1967.
16. Чуа Л. О., Пен-Мин Лин. Машинный анализ электронных схем/Пер. с англ. — М.: Энергия, 1980.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автономная цепь 174  
Алгоритмы Ньютона—Рафсона 93  
— Рунге Кутты 245  
— Эйлера 243, 246  
Алгоритмы многошаговые 245  
— одношаговые 243  
Анализ графический 68  
— динамических цепей 148  
— кусочно-линейный 73  
— резистивных цепей 59  
— численный 93, 241  
Аппроксимация 36  
— интерполяцией 38  
— кусочно-линейная 41  
— среднеквадратическая 39  
— степенная 37  
  
Ван-дер-Поля уравнение 173  
Варикал 146  
Вариконд 146  
Варистор 18  
Вольтметр амплитудный 289  
Выпрямление двухполупериодное 115  
— переменного тока 113  
— полупериодное 113  
  
Гармоническая линеаризация 276  
Генератор гармонических колебаний 310  
— резистивно-емкостный 322  
— трехточечный 321  
Главный контур 85  
Главное сечение 85  
Граф цепи 82  
Графический метод 68, 224  
  
Демодуляция 291  
Детектор модулированных колебаний 291  
Динамическая цепь 148  
Динистор 22  
Диод 20, 49  
— идеальный 31  
— лавинный 20  
— обращенный 22  
— полупроводниковый 20  
— туннельный 21  
— электровакуумный 18  
Дискретизация 128  
Дискретные схемы 98, 254  
Дуффинга уравнение 174  
  
Емкостный элемент 7  
— — нелинейный 7  
— — параметрический 326  
Емкость динамическая 7  
  
Изоклина 225  
Индуктивность динамическая 8  
Индуктивный элемент 7  
— — нелинейный 8  
— — параметрический 328  
Источник напряжения 30  
— тока 30  
— управляемый 31  
Итерации метод 96  
  
Кирхгофа закон напряжений 83  
— закон токов 83  
Ключ диодный 125  
— идеальный 124  
— тиристорный 127  
— транзисторный 126  
Колебания параметрические 341  
Колебательный контур линейный 201  
— — нелинейный 173  
Компаратор 35  
Контур емкостный 150  
Крутизна триода 171  
  
Лампа неоновая 19  
— электровакуумная 27  
Линеаризация 183  
Логические схемы 129  
  
Метод возмущений 259  
— гармонической линеаризации 272  
— изоклин 216, 224  
— Льенара 219  
— усреднения 266  
Модуляция амплитудная 122  
Мультивибратор на двухполюснике 299  
— на усилителе 305  
Мутатор 58  
Мэнли—Роу теорема 335  
  
Накачка 334, 341  
Намагничивание 133  
Начальные условия 189  
Независимость уравнений 84  
Нормальная форма уравнений 153  
Ньютона-Рафсона алгоритм 93

Обратная связь 298  
Ограничения схемы 116  
Особенности нелинейных цепей 9

Параллельное соединение 70  
Параметрическое усиление 345  
Переключаемая цепь 238  
Переменная состояния 152  
Порядок цепи 149  
Последовательное соединение 68  
Предельный цикл  
Преобразование спектров 107  
— схем 67  
— характеристик 54  
— частоты 122  
Пространство состояния 157

Рабочая точка 102  
Резистивный элемент 5  
Рефлектор 57  
Ротатор 56  
Рунге—Кутта алгоритм 245

Самовозбуждение колебаний 316  
Седловая точка 211  
Сечение 83  
— индуктивное 150  
Скаляр 55  
Смещение 102  
Сопrotивление динамическое 6  
— статическое 6  
Состояние равновесия 178, 181  
Стабилизация напряжения 119  
Стабилитрон газовый 20  
— полупроводниковый 20  
Схемы замещения 49  
— кусочно-линейные 49  
— ограничения 116

Термистор 26  
Тиристор 26  
Траектория 185  
— цепи 1-го порядка 187  
— цепи 2-го порядка 200  
Термистор биполярный 28  
— полевой 28  
Триггер 292  
Триод электровакуумный 27

Узел неустойчивый 211  
— устойчивый 211  
Умножитель частоты 122  
— параметрический 345

— операционный 34  
Уравнения динамических цепей 148  
— резистивных цепей 87, 90  
— состояния 152  
Условие стационарности колебаний  
Устойчивость асимптотическая 182  
— — по Ляпунову 180  
— — состояния равновесия 180  
— — численная 248

Фазовая плоскость 200  
Фиксатор амплитуды 289  
Фокус неустойчивый 212  
— устойчивый 212  
Фотодиод 25  
Функциональное уравнение 59

Характеристика вебер-амперная 7  
— вольт-амперная 5  
— входная 62, 68  
Характеристика кулон-вольтная 7  
— передаточная 62, 72  
— типа 14  
— типа 15

Центр 212  
Цепь автономная 174  
— динамическая 148  
— емкостная 146  
— индуктивная 136, 142  
— магнитная 139  
— резистивная 59

Частота комбинационная 110  
Частотно-энергетические соотношения 333  
Численное решение  
— — динамических цепей 241, 243  
— — резистивных цепей 93, 98  
— функциональных уравнений 93

Элемент активный 6  
— двухполюсный 7  
— емкостный 7  
— индуктивный 7  
— пассивный 6  
Элемент с переменным параметром 325, 326, 328  
— трехполюсный 23  
— управляемый 23

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
Введение . . . . .	5
§ В.1. Общие сведения о нелинейных элементах . . . . .	5
§ В.2. О некоторых особенностях нелинейных цепей . . . . .	9
<b>Г л а в а 1. Характеристики элементов и уравнения нелинейных резистивных цепей . . . . .</b>	<b>12</b>
§ 1.1. Общие сведения . . . . .	12
§ 1.2. Характеристики резистивных двухполюсных элементов . . . . .	17
§ 1.3. Управляемые двух- и трехполюсные резистивные элементы . . . . .	23
§ 1.4. Некоторые виды идеализированных нелинейных элементов . . . . .	29
§ 1.5. Функциональные блоки . . . . .	33
§ 1.6. Аналитическое представление характеристик . . . . .	36
§ 1.7. Получение схем с заданными вольт-амперными характеристиками . . . . .	43
§ 1.8. Кусочно-линейные схемы замещения нелинейных элементов . . . . .	49
§ 1.9. Преобразование нелинейных характеристик . . . . .	54
<b>Г л а в а 2. Методы анализа нелинейных резистивных цепей . . . . .</b>	<b>59</b>
§ 2.1. Задача анализа нелинейных резистивных цепей . . . . .	59
§ 2.2. Определение реакции по заданному входному сигналу и характеристике цепи . . . . .	64
§ 2.3. Метод преобразования схем . . . . .	67
§ 2.4. Анализ нелинейных резистивных цепей методом последовательных кусочно-линейных схем . . . . .	73
§ 2.5. Уравнения нелинейных резистивных цепей . . . . .	80
§ 2.6. Узловые уравнения нелинейных резистивных цепей . . . . .	90
§ 2.7. Численные методы решения функциональных уравнений . . . . .	93
§ 2.8. Численный анализ по дискретным линеаризованным схемам . . . . .	98
§ 2.9. Определение рабочих точек нелинейных элементов . . . . .	102
§ 2.10. Преобразование спектров сигналов нелинейной цепью . . . . .	107
<b>Г л а в а 3. Применение нелинейных резистивных цепей . . . . .</b>	<b>111</b>
§ 3.1. Общие замечания . . . . .	111
§ 3.2. Выпрямление переменного тока . . . . .	113
§ 3.3. Схемы ограничения . . . . .	116
§ 3.4. Стабилизация постоянного напряжения . . . . .	119
§ 3.5. Схемы преобразования спектров . . . . .	122
§ 3.6. Электронные ключи . . . . .	124
§ 3.7. Логические схемы . . . . .	129
<b>Г л а в а 4. Нелинейные индуктивные и емкостные цепи . . . . .</b>	<b>131</b>
§ 4.1. Нелинейные индуктивные элементы . . . . .	131
§ 4.2. Расчет нелинейных цепей, составленных из индуктивных элементов . . . . .	136
§ 4.3. О расчете магнитных цепей . . . . .	139
§ 4.4. Некоторые применения нелинейных индуктивных цепей . . . . .	142
§ 4.5. Нелинейные емкостные элементы и емкостные цепи . . . . .	146
<b>Г л а в а 5. Уравнения нелинейных динамических цепей . . . . .</b>	<b>148</b>
§ 5.1. О порядке цепи и выборе переменных уравнений . . . . .	148
§ 5.2. Уравнения состояния электрической цепи . . . . .	152



§ 5.3.	Составление уравнений состояния электрической цепи . . . . .	158
§ 5.4.	Примеры составления уравнений состояния . . . . .	167
§ 5.5.	О решении уравнений состояния. Состояния равновесия автономных цепей . . . . .	174
§ 5.6.	Об устойчивости состояний равновесия . . . . .	180
<b>Г л а в а 6.</b>	<b>Метод траекторий в пространстве состояния . . . . .</b>	<b>185</b>
§ 6.1.	Общие замечания . . . . .	185
§ 6.2.	Траектории в одномерном пространстве . . . . .	187
§ 6.3.	Процессы и траектории автономных цепей первого порядка с многозначными характеристиками . . . . .	193
§ 6.4.	Понятие о траекториях на плоскости состояния . . . . .	200
§ 6.5.	Точки равновесия и предельные циклы на плоскости состояния . . . . .	210
§ 6.6.	Построение траекторий на плоскости состояния . . . . .	214
<b>Г л а в а 7.</b>	<b>Методы анализа нелинейных динамических цепей . . . . .</b>	<b>223</b>
§ 7.1.	Общие замечания . . . . .	223
§ 7.2.	Графический метод анализа цепи первого порядка . . . . .	224
§ 7.3.	Кусочно-линейный метод анализа нелинейных динамических цепей . . . . .	228
§ 7.4.	Расчет переключаемых цепей первого порядка . . . . .	238
§ 7.5.	О численных методах решения уравнений состояния . . . . .	241
§ 7.6.	Алгоритмы решения уравнений состояния . . . . .	243
§ 7.7.	Понятие о численной устойчивости. Дискретные модели цепи . . . . .	248
<b>Г л а в а 8.</b>	<b>Приближенные аналитические методы исследования периодических режимов . . . . .</b>	<b>256</b>
§ 8.1.	Общие замечания . . . . .	256
§ 8.2.	Метод возмущений . . . . .	259
§ 8.3.	Метод усреднения . . . . .	266
§ 8.4.	Метод гармонической линеаризации (частотный метод) . . . . .	272
§ 8.5.	Комплексные эквивалентные функции нелинейных элементов цепи . . . . .	280
§ 8.6.	Нелинейный колебательный контур . . . . .	282
<b>Г л а в а 9.</b>	<b>Применения нелинейных динамических цепей . . . . .</b>	<b>286</b>
§ 9.1.	Общие замечания . . . . .	286
§ 9.2.	Диодная <i>RC</i> -схема . . . . .	287
§ 9.3.	Триггеры . . . . .	292
§ 9.4.	Общая характеристика автоколебательных цепей . . . . .	297
§ 9.5.	Мультивибраторы на двухполюсных резисторах . . . . .	299
§ 9.6.	Мультивибраторы на усилителях . . . . .	305
§ 9.7.	<i>LC</i> -генераторы гармонических колебаний . . . . .	310
§ 9.8.	Условия стационарности. Режимы самовозбуждения . . . . .	316
§ 9.9.	Трехточечные <i>LC</i> -генераторы. <i>RC</i> -генераторы . . . . .	321
<b>Г л а в а 10.</b>	<b>Электрические цепи с переменными параметрами . . . . .</b>	<b>324</b>
§ 10.1.	Элементы электрических цепей с переменными параметрами . . . . .	324
§ 10.2.	Преобразование частоты в параметрической цепи . . . . .	331
§ 10.3.	Об анализе цепей с переменными параметрами . . . . .	335
§ 10.4.	О параметрическом возбуждении колебаний . . . . .	341
§ 10.5.	О параметрическом усилении колебаний . . . . .	345
<b>Заключение . . . . .</b>		<b>347</b>
<b>Литература . . . . .</b>		<b>348</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>		<b>349</b>

